LEÇONS

SUR LES

SÉRIES DIVERGENTES

OUVRAGES A CONSULTER

1° dans cette même collection :

S. Bernstein. — *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle.*

E. Borel. — *Leçons sur les fonctions monogènes d'une variable complexe.*

T. Carleman. — *Leçons sur les fonctions quasi-analytiques.*

P. Dienes. — *Leçons sur les singularités des fonctions analytiques.*

2° dans le Mémorial des Sciences Mathématiques :

Buhl. — *Formules stokiennes* (fasc. XVI. Gauthier-Villars et Cie, 1926).

Valiron. — *Théorie générale des séries de Dirichlet* (fasc. XVII. Gauthier-Villars et Cie, 1926).

3° Ouvrages divers :

Bicherbach. — *Neuere Untersuchengen über Funtkionen von Komplexen Variablen* (*Encycl. d. math. Wissenschaften,* II, C. 4).

Bromwich. — *An introduction to the Theory of Infinite series* (London Mai Millun, 1908).

Hobson. — *The Theory of functions of a real variable and the theory of Fouriers series* (*Cambridge university Press*, 1921–1925).

Knopp. — *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen* (J. Springer, Berlin, 1922).

Riesz et Hardy. — *The general Theory of Dirichlet's Series* (Cambridge, 1915).

Smail. — *Elements of the Theory of Infinite Processes* (New-York, Mc Graw-Hill BookC°, 1923).

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS
SUR LES
SÉRIES DIVERGENTES

PAR

Émile BOREL
Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne,
Directeur honoraire de l'École normale supérieure.

DEUXIÈME ÉDITION
REVUE ET ENTIÈREMENT REMANIÉE

AVEC LE CONCOURS DE

Georges BOULIGAND
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1928

PRÉFACE DE LA DEUXIÈME ÉDITION

Depuis l'apparition de la première édition, les travaux sur les séries divergentes ont été si nombreux et si importants qu'il était nécessaire de remanier et de compléter cet ouvrage. Je dois remercier de tout cœur M. Bouligand d'avoir bien voulu m'apporter, pour cette tâche, son inappréciable concours. Grâce à lui, les lecteurs trouveront ici, non seulement les principes généraux de la théorie des séries divergentes, mais un exposé des travaux les plus récents et aussi des renseignements bibliographiques qui leur permettront de s'orienter parmi les recherches nouvelles. Nous osons espérer que cette nouvelle édition sera ainsi parfaitement adaptée au but que visent tous les ouvrages de cette collection : mettre le plus directement possible les chercheurs au courant de l'état actuel d'une branche de la science et les placer ainsi à pied d'œuvre pour entreprendre avec profit de nouvelles recherches.

Je tiens à exprimer, en terminant, ma reconnaissance à la maison Gauthier-Villars, pour les soins qu'elle continue à apporter à cette Collection de monographies.

Paris, 15 novembre 1927.

Emile BOREL.

PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION

L'accueil favorable que le public mathématique a bien voulu faire aux deux Ouvrages que j'ai déjà publiés sur la Théorie des fonctions m'est un précieux encouragement à continuer la tâche que j'ai entreprise. Comme je l'ai déjà dit dans une précédente Préface, mon intention est de faire paraître une série de petits Livres qui soient, autant que possible, indépendants les uns des autres : pour pouvoir lire chacun d'eux, il suffit de connaître les principes généraux de la Théorie des fonctions tels qu'ils se trouvent dans tous les cours d'Analyse.

La théorie des séries divergentes a fait l'objet de mon enseignement à l'École Normale en 1899-1900 ; mais ces *Leçons* sont notablement plus étendues que mon Cours ; le Chapitre V, notamment, renferme l'exposition de certains résultats nouveaux que j'ai obtenus depuis un an.

M. Dauzats, agrégé-bibliothécaire à l'École Normale, qui avait suivi mon cours, avait bien voulu m'offrir de le rédiger. Par suite de diverses circonstances indépendantes de sa volonté, il n'a pu donner suite que partiellement à ce projet : la rédaction du Chapitre I lui est seule due. Je tiens à lui exprimer ici ma vive reconnaissance pour les soins qu'il a donnés à cette rédaction.

Étant donné l'intérêt que me paraît présenter le problème des séries divergentes et vu les polémiques ardentes qu'il a autrefois soulevées, j'ai cru devoir faire précéder d'une courte Introduction historique l'exposition des théories modernes. Cette Introduction se termine par quelques considérations générales sur les séries divergentes et par quelques indications sur le plan de ces Leçons.

INDEX

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES DIVERGENTES

INTRODUCTION.

HISTORIQUE ET GÉNÉRALITÉS.

Les séries divergentes avant Abel et Cauchy.

1. On s'accorde généralement pour dater les débuts de l'Analyse moderne des travaux d'Abel et de Cauchy. Ce qui caractérise surtout ces deux géomètres, c'est le souci de la parfaite rigueur des raisonnements. C'est là la réforme essentielle qu'ils ont introduite dans les Mathématiques, en proclamant hautement qu'un raisonnement non rigoureux, un raisonnement par induction ou par à peu près, doit être regardé comme inexistant. Ce principe une fois posé, il appartenait aux successeurs d'Abel et de Cauchy d'en tirer les conséquences et d'introduire peu à peu la rigueur parfaite des méthodes et des raisonnements propre au développement mathématique de la seconde moitié du siècle dernier.

La révolution ainsi accomplie était indispensable : on peut toutefois se demander si l'abandon des méthodes moins rigoureuses des géomètres du XVIIIe siècle a été un bien, au point de vue de la facilité de la découverte mathématique : il a pu être nécessaire de les abandonner momentanément pour permettre au principe de la rigueur complète de s'établir sans contestation, mais, ce stade étant franchi, l'étude des méthodes anciennes peut avoir du bon, à condition de les employer seulement comme instrument de recherche, en se réservant de démontrer ensuite les résultats par les méthodes rigoureuses de l'Analyse moderne.

La théorie des séries divergentes est l'une de celles auxquelles s'appliquent le mieux les généralités qui précèdent; nous allons nous occuper de cette théorie et rechercher d'abord où en était la question avant les premiers travaux d'Abel et de Cauchy.

Le procédé le plus commode pour cette recherche consiste à consulter le grand Traité de Calcul différentiel et intégral de Lacroix (1). On peut considérer, en effet, que cet Ouvrage résume l'Analyse ancienne; en le comparant avec l'*Analyse algébrique* de Cauchy (2), publiée seulement quelques années après, on mesure toute la distance qui sépare les Mathématiques du XVIII[e] siècle des Mathématiques du XIX[e]. Peu de comparaisons sont plus instructives pour l'histoire de la Science.

Voyons donc ce que le grand Traité de Lacroix nous apprend au sujet des séries divergentes. Nous emprunterons aussi quelques renseignements bibliographiques au substantiel article de M. Pringsheim dans l'Encyclopédie Burkhard-Meyer (3).

Il importe d'abord d'établir une distinction entre les séries purement numériques et les séries dont les termes sont fonctions d'une variable.

2. En ce qui concerne les séries divergentes numériques, il semble d'abord impossible de les utiliser directement pour un calcul précis. Il est cependant un cas dans lequel on a pu les utiliser pour un calcul approximatif : c'est celui où les termes de la série divergente, alternativement positifs et négatifs, commencent à décroître jusqu'à un certain terme minimum, pour augmenter ensuite au delà de toute limite et où l'on sait au préalable que l'erreur commise en s'arrêtant à un certain terme est inférieure au premier terme négligé. En calculant la somme de la série jusqu'au terme minimum, on aura un résultat approché, dont l'approximation sera du même ordre de grandeur que ce terme, et pourra par suite être très notable, si ce terme est suffisamment petit.

Souvent même, le terme minimum occupera un rang très élevé et sera beaucoup plus petit que l'approximation désirée. On cal-

---

(1) S.-F. LACROIX, *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, 2e édition, 3 vol. in-4°, Paris, 1810, 1814 et 1819.

(2) *Œuvres de Cauchy*, 2e série, t. III. La première édition est de 1821.

(3) *Encyclopedie der mathematischen Wissenschaften*, I, A, 3, § 39, 40.

culera simplement alors les premiers termes, jusqu'à ce qu'on arrive à des termes pouvant être regardés comme négligeables, et l'on prendra la somme ainsi trouvée comme valeur approchée de la série.

L'exemple classique en Analyse de la série pour laquelle cette méthode réussit est la série de Stirling. Un exemple plus important est celui des séries que les astronomes emploient dans leurs calculs : ils les ont utilisées longtemps sans se douter qu'elles étaient divergentes et en calculant seulement les premiers termes. Depuis que H. Poincaré, dans un Mémoire célèbre ([1]), a démontré leur divergence, on continue à les utiliser, les résultats obtenus confirmant les observations. Nous verrons dans le Chapitre I comment la théorie des séries asymptotiques de H. Poincaré explique ce fait paradoxal.

Mais il est des séries divergentes numériques dont les termes ne vont pas en décroissant, ou même croissent constamment à partir du premier, en valeur absolue, et augmentant au delà de toute limite. Malgré cela, il y a lieu, dans certaines questions, de leur attribuer une *somme conventionnelle* ([2]).

On peut citer à titre d'exemples les deux séries suivantes, étudiées dans le Traité de Lacroix :

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \tag{1}$$

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + \dots \tag{2}$$

La série (1), déjà considérée par Jacques Bernoulli et Leibnitz, a donné lieu, depuis Euler jusqu'à Cauchy, à de nombreuses discussions; après Cauchy, on l'a souvent citée comme exemple de l'emploi illégitime des séries divergentes.

Euler considère la somme de la série (1) comme égale à $\frac{1}{2}$; et cette affirmation a pour lui la signification suivante : si par un calcul quelconque, on est conduit à la série (1), le résultat de ce calcul est certainement $\frac{1}{2}$.

([1]) *Acta Mathematica*, t. XIII.

([2]) Notons avec C. Knopp (*Theorie und anwendungen der unendlichen Reihen*, Julius Springer, Berlin) que la notion de somme d'une série convergente, au sens classique, est elle-même empreinte d'un caractère conventionnel : il n'est aucunement de nécessité logique d'appeler *somme* la limite (supposée existante) des quantités s_n.

Ainsi présentée et prise à la lettre, la proposition d'Euler est certainement inexacte. L'objection suivante se présenta bientôt :

Soient n et m $(n < m)$ deux entiers positifs. On a

$$(3) \qquad \frac{1-x^n}{1-x^m} = 1 - x^n + x^m - x^{n+m} + x^{2m} + \ldots.$$

Si l'on fait $x = 1$, on obtient

$$\frac{n}{m} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

La série d'Euler a donc pour somme une fraction positive inférieure à un, mais à cela près quelconque.

Lagrange (¹) montra que cette objection n'était pas essentielle; Leibnitz avait rattaché le calcul de la série (1) au calcul des probabilités. La somme de la série (1) étant 1 ou 0 suivant que l'on prend un nombre impair ou pair de termes, elle est aussi souvent égale à 1 qu'à 0; donc sa valeur la plus probable est égale à la moyenne $\frac{1}{2}$. Lagrange fait observer que, si l'on veut appliquer la même méthode à la série (3), on doit remarquer qu'elle n'est pas complète, et que si l'on prend par exemple $n = 3$, $m = 5$, elle doit s'écrire

$$1 + 0 + 0 - x^3 + 0 + x^5 + 0 + 0 - x^8 + 0 + x^{10} + 0 + \ldots.$$

Dès lors, on voit que, si l'on prend la somme successivement de 1, 2, 3, 4, 5 termes de la série, on constate que, sur 5 sommes consécutives, 3 sont égales à 1 et 2 à 0. La valeur moyenne est donc $\frac{3}{5}$, ce qui est bien la vraie valeur de la fonction qui a donné naissance à la série (²).

Cette argumentation un peu vague devait être transformée beaucoup plus tard par Frobenius (³), en une proposition précise

---

(¹) *Voir* pour cette discussion, LACROIX, t. III, p. 160, et LAGRANGE, *Rapport sur le Mémoire de Callet*, dans le Tome III des *Mémoires de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut.*

(²) La théorie des séries divergentes dans ses rapports avec le Calcul des probabilités a été étudiée tout récemment par M. Paul Lévy dans un Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 54, 1926, p. 1-25 (*Sur les conditions d'application et sur la régularité des procédés de sommation des séries divergentes*).

(³) *Journal de Crelle*, t. 89, 1880, p. 262.

et générale. Si l'on pose

$$\sum_{0}^{n} a_i = s_n,$$

on a

$$\lim_{x=1} \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1},$$

toutes les fois que la limite du second membre existe.

Si dans cet énoncé, la série Σa_n est supposée convergente, les *sommes s_n tendent vers une limite. Donc la moyenne des sommes écrite au second membre a aussi une limite et cette limite est la même* (¹). D'autre part, dire que Σa_n est convergente équivaut à dire que la série entière $\Sigma a_n x^n$ converge pour $x = 1$. Le rayon de convergence de cette série est donc ≥ 1. S'il surpasse l'unité, l'égalité précédente traduit la continuité de la série entière à l'intérieur de son intervalle de convergence; si le rayon de convergence est l'unité, la même égalité traduit le second théorème d'Abel, d'après lequel si x tend vers 1 par valeurs réelles, la fonction représentée par la série entière tend vers la somme de la série convergente Σa_n.

En résumé, le théorème de Frobenius apparaît donc comme une extension du théorème d'Abel, extension qui s'opère en conservant littéralement l'énoncé de ce dernier, à la seule condition d'adopter une nouvelle définition de la locution : *somme d'une série*. Pour l'obtenir, on substitue à la limite de s_n celle de la moyenne arithmétique (²)

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1}.$$

(¹) Ce théorème est essentiel. On peut le démontrer en écrivant

$$\frac{(s_0 + \ldots + s_{p-1}) + (s_p + \ldots + s_n)}{n+1}$$

et faisant croître simultanément p et n de manière que le rapport $\frac{p}{n}$ tende vers zéro. Le résultat annoncé devient dès lors évident.

(²) Un calcul immédiat donne

$$s_n = (n+1)\,\sigma_n - n\,\sigma_{n-1},$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = (n+1)\,\sigma_n - 2n\,\sigma_{n-1} + (n-1)\,\sigma_{n-2}.$$

On en conclut que si σ_n possède une limite, le rapport $\frac{a_n}{n}$ tend vers zéro. Il en

Moyennant cette nouvelle définition, la série d'Euler a effectivement une somme dont la valeur est $\frac{1}{2}$.

3. Mais revenons à l'affirmation d'Euler. A côté de l'objection que nous venons de formuler, on a pu en présenter bien d'autres, et former d'une manière générale des séries, dont les termes sont fonctions de x, séries qui sont convergentes pour $|x| < 1$, et qui jouissent en outre des propriétés suivantes : d'une part, pour $x = 1$, elles se réduisent à la série d'Euler; d'autre part, lorsque x tend vers 1 par valeurs réelles moindres que 1, la fonction représentée par la série initiale tend vers un nombre absolument quelconque, ou même ne tend vers aucune limite. Nous ne pensons pas, pour cela, qu'il faille en conclure, avec M. Pringsheim, que l'affirmation d'Euler est dépourvue de toute valeur. Il vaut mieux l'interpréter de la manière suivante : si, dans un calcul, on est conduit à la série (1), on peut *en général* la remplacer par $\frac{1}{2}$; le résultat est exact toutes les fois qu'il s'agit de calculs se présentant naturellement, au cours d'une recherche objective, et non d'expressions construites artificiellement avec le souci de mettre justement la règle d'Euler en défaut (2).

---

résulte que si la limite de σ_n existe, sans que s_n admette une limite, le rayon de convergence de la série entière $\Sigma a_n x^n$ est l'unité. La méthode de la moyenne arithmétique est donc susceptible de faire connaître la valeur de la fonction aux extrémités de l'intervalle de convergence, mais elle reste inopérante en dehors de celui-ci.

(2) Il importe de remarquer que cette règle peut subsister pour des séries présentant des lacunes (qu'il y a lieu de compléter par des termes nuls) : par exemple considérons la série

$$s(x) = 1 - x + x^4 - x^9 + x^{16} - x^{25} + x^{32} - \ldots;$$

lorsque x tend vers 1 par valeurs réelles, la limite de $s(x)$ est $\frac{1}{2}$.

Il est facile de comprendre que cela résulte de la régularité offerte ici par la loi des termes manquants. Pour préciser cette idée, appelons $\varphi(n)$ une fonction croissante de n, dont la valeur soit un entier pour n entier (tel un polynome en n à coefficients entiers et positifs), et considérons la fonction $F(x)$ définie par la série

$$F(x) = 1 - x^{\varphi(1)} + x^{\varphi(2)} - x^{\varphi(3)} + x^{\varphi(4)} - \ldots + (-1)^n x^{\varphi(n)} \pm \ldots$$

qui, pour $x = 1$, se réduit à la série d'Euler, mais dans laquelle nous devons ici

Cet énoncé n'a évidemment qu'une valeur statistique. Mais on peut transformer la règle d'Euler en un théorème, parfaitement rigoureux, si l'on admet les prémisses suivantes :

1° Il existe une classe de séries, plus étendue que celle des séries classiquement dénommées convergentes, telle qu'à chaque série de cette classe, corresponde une *somme*;

2° La série d'Euler appartient à cette classe;

3° Soit S la somme d'une série Σa_n de la classe. La série $\Sigma\lambda a_n$

---

tenir compte des lacunes. Supposons, pour fixer les idées, que cette série, complétée par des zéros, admette une somme, au sens défini par le processus de la moyenne arithmétique σ_n, précédemment cité : nous verrons d'ailleurs plus loin que cette hypothèse est parfaitement plausible. D'après le théorème de Frobenius, cette somme sera aussi la limite vers laquelle tend $F(x)$ quand x tend vers 1, soit $F(1)$. La règle d'Euler sera vraie si l'on a bien $F(1) = \frac{1}{2}$. Or, en formant les sommes consécutives, on en trouve successivement

$\varphi(1)$	qui sont égales à	1,
$\varphi(2) - \varphi(1)$	»	0,
$\varphi(3) - \varphi(2)$	»	1,
$\varphi(4) - \varphi(3)$	»	0,
....		,
$\varphi(2n-1) - \varphi(2n-2)$	»	1,
$\varphi(2n) - \varphi(2n-1)$	»	0.

Pour que la règle d'Euler soit valable, il faudra donc qu'on ait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4) + \ldots + \varphi(2n-1)}{\varphi(2n)} = \frac{1}{2}.$$

Si cette condition est rempli, $\sigma_{\varphi(2n)}$ tendra vers $\frac{1}{2}$, mais, par hypothèse, σ_p a une limite pour p infini, donc cette limite sera nécessairement $\frac{1}{2}$. La condition ci-dessus est donc suffisante. Or, en posant

$$\varphi(1) = \psi(1), \qquad \varphi(n) - \varphi(n-1) = \psi(n),$$

cette condition s'écrit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(1) + \psi(3) + \psi(5) + \ldots + \psi(2n-1)}{\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \psi(4) + \psi(5) + \ldots + \psi(2n-1) + \psi(2n)} = \frac{1}{2}$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(1) + \psi(3) + \psi(5) + \ldots + \psi(2n-1)}{\psi(2) + \psi(4) + \psi(6) + \ldots \psi(2n)} = 1.$$

Or, on vérifie immédiatement que cette dernière relation a lieu notamment dans le cas (déjà cité) où $\varphi(n)$ est *un polynome à coefficients entiers et positifs*, cas où σ_p a certainement une limite, vu que le rapport de $\varphi(n-1)$ à $\varphi(n)$ tend vers 1. Dans ce cas (qui englobe l'exemple indiqué), la règle d'Euler est donc exacte.

(où λ désigne un facteur quelconque indépendant de n) appartient elle-même à la classe et a pour somme λS;

4° Si la série $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ admet une somme S, la série $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ admet elle-même une somme égale à $S - a_0$.

Ces hypothèses entraînent la possibilité d'écrire légitimement

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - S,$$

d'où

$$S = \frac{1}{2}.$$

Finalement, les calculs au cours desquels il est permis d'appliquer la règle d'Euler sont donc ceux où, d'une manière implicite, on considère les hypothèses ci-dessus comme vérifiées.

4. Mais nous nous sommes assez étendus sur la série (1). Disons quelques mots de la série

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + 1.2.3.4.5 - \ldots.$$

Il ne peut être question d'utiliser une moyenne de sommes successives; on n'obtiendrait pas de valeur limite; on ne peut non plus, comme il pourrait être suggéré par ce qui précède, introduire une variable x et chercher la limite de la série

$$(2') \qquad 1 - 1.2x + 1.2.3x^2 - 1.2.3.4x^3 + \ldots$$

lorsqu'on fait $x = 1$. Cette série (2′) est en effet divergente pour toute valeur de x.

Lacroix obtient la somme de la série (2) par une transformation assez compliquée (t. III, p. 347); le résultat ainsi obtenu coïncide d'ailleurs avec la valeur d'une intégrale qui donne naissance à la série (2′) et dont nous parlerons plus loin (n° 24).

5. Sans qu'il soit nécessaire d'insister, on voit que, malgré des hésitations et des scrupules qui devaient mettre en garde contre les erreurs grossières, les géomètres du temps de Lacroix avaient d'assez bonnes raisons *expérimentales* d'avoir confiance dans les séries divergentes, même numériques.

A plus forte raison, employaient-ils sans le moindre scrupule les séries divergentes dont les termes sont fonctions d'une variable. Considérant simplement au point de vue formel les calculs exé-

cutés sur ces séries, ils étaient amenés à constater que les résultats de ces calculs exprimaient des conclusions le plus souvent exactes (¹). Nous verrons plus loin comment de tels résultats sont aisément explicables.

(¹) Le passage suivant du *Traité* de Lacroix (t. I, p. 4) montre nettement le point de vue auquel il se plaçait :

« Il est à propos de faire attention au mot *développement* que l'on emploie ici au lieu de celui de *valeur*, car une série ne donne pas toujours la valeur de la fonction à laquelle elle appartient. Quelquefois même, au lieu d'en approcher davantage, à mesure qu'on prend plus de termes, elle s'en éloigne sans cesse, ainsi qu'on peut le remarquer sur la fonction $\frac{a}{a-x}$ développée suivant les puissances de x. La série

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\dots$$

qui en résulte ne donne des résultats convergents vers la vraie valeur que dans le cas $x<a$; ce n'est donc que dans ce cas qu'il est permis d'employer par approximation cette vraie valeur, mais cependant l'expression

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\dots$$

considérée en faisant abstraction du dernier terme, c'est-à-dire comme contenant toujours des termes de même forme, quelque loin qu'on la prolonge, est tellement liée avec la fonction $\frac{a}{a-x}$ que si une question nous conduisait à la série

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\dots$$

nous serions en droit d'en conclure que la fonction cherchée n'est autre que $\frac{a}{a-x}$; ou si nous découvrions quelque propriété relative à une suite termes tels que $1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\dots$, nous pourrions affirmer qu'elle appartient à la fonction $\frac{a}{a-x}$. Pour sentir la vérité de cette assertion, il suffit d'observer que le développement régulier d'une fonction, considéré dans toute son étendue, vérifie l'équation qui caractérise cette fonction. Dans l'exemple que j'ai choisi, si l'on fait $\frac{a}{a-x}=y$, on en conclura l'équation

$$a-(a-x)y=0,$$

et si l'on substitue, au lieu de la fonction y, son développement

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\dots,$$

on verra que, quelque loin qu'on pousse le calcul, les termes se détruiront toujours. On conçoit qu'il en serait de même dans tout autre exemple, et d'ailleurs il s'en présentera un grand nombre dans la suite de ce Traité. »

On verra qu'il y a peu de chose à ajouter aux idées de Lacroix pour obtenir la base d'une théorie rigoureuse des séries divergentes.

En somme, on peut résumer l'état de la Science à l'époque de Lacroix en disant qu'on avait, dans les séries divergentes, une confiance justifiée par les faits, mais cependant rendue prudente par les difficultés que nous avons signalées au n° 2.

Les travaux de Cauchy.

6. Aussi, n'est-ce pas sans hésitation qu'Abel et Cauchy frappèrent d'ostracisme les séries divergentes. Quelques citations montreront bien quels furent leurs scrupules. Abel écrit à Holmboë, le 16 janvier 1826 (¹) : « Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration..., la partie la plus essentielle des Mathématiques est sans fondement. *Pour la plus grande partie, les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant.* »

D'autre part, dans la Préface de son *Analyse algébrique*, dès 1821, Cauchy écrit : « J'ai été forcé d'admettre diverses propositions qui paraîtront peut-être *un peu dures;* par exemple, qu'une série divergente n'a pas de somme.... »

On voit combien sont grands les scrupules de Cauchy; aussi ne doit-on pas s'étonner qu'il se soit posé, lui aussi, le problème énoncé par Abel dans le passage que nous avons cité, et ait recherché comment l'emploi des séries divergentes peut conduire, d'une manière presque constante, à des résultats exacts, tout en n'étant pas théoriquement légitime (du moins, dans le champ des définitions usuelles). Une mort prématurée n'a malheureusement pas permis à Abel de s'occuper de cette question, comme il en annonce l'intention, aussi avons-nous dû mettre le seul nom de Cauchy en tête de ce paragraphe.

Les travaux de Cauchy sur les séries divergentes sont d'importance très inégale; le court Mémoire sur la série de Stirling (²) se distingue nettement des autres par la clarté et la beauté de ses

---

(¹) *Œuvres complètes d'Abel*, édition Sylow-Lie, t. II, p. 256-257.

(²) *Comptes rendus*, t. XVIII, p. 370; *Œuvres de Cauchy*, 1re série, t. VIII, p. 18.

résultats; nous étudierons en détail ce Mémoire au début du Chapitre I. Contentons-nous de dire ici que Cauchy y justifie, pour la série de Stirling, le procédé de calcul approximatif dont nous avons parlé tout à l'heure (n° 2), pour les séries dont les termes décroissent d'abord beaucoup pour croître ensuite au delà de toute limite.

La théorie de Cauchy ne s'applique d'ailleurs pas à la seule série de Stirling, mais encore, fait-il observer, à une classe fort générale de séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable. Mais cette partie du Mémoire de Cauchy, étant restée sans application, est tombée dans l'oubli et la série de Stirling a été le seul exemple classique de *série asymptotique*, jusqu'au jour où H. Poincaré a fait une théorie générale de cette classe de séries (*voir* Chap. I).

7. Parmi les autres recherches de Cauchy sur les séries divergentes, on doit citer sa théorie des *séries syntagmatiques*, qui sont des séries ordonnées suivant les puissances de plusieurs variables et qui sont convergentes ou divergentes, suivant la manière dont on arrange leurs termes ([1]). Signalons l'analogie certaine, quoique assez éloignée, de ces recherches de Cauchy avec les travaux plus récents de M. Mittag-Leffler dont il sera question au Chapitre V. Nous devons d'ailleurs nous empresser de dire que les Mémoires de Cauchy, faute d'applications simples, étaient tombés dans l'oubli, et que M. Mittag-Leffler n'en avait nulle connaissance lorsqu'il a fait sa belle découverte.

Le fait essentiel qui se dégage de cette revue rapide des travaux

---

([1]) Il est bien facile de comprendre dès maintenant comment ce point de vue consistant à rechercher un arrangement, ou plus généralement une transformation opportune des termes se rattache à ce qui précède. Soit $S_n(x)$ la somme des n premiers termes d'une série entière. En posant

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0 + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1},$$

on obtient la somme des $n+1$ premiers termes d'une série, ayant pour terme général un polynome. En substituant à la série entière cette série de polynomes (qui en résulte par transformation des termes), il se peut que cette deuxième série converge en certains points du cercle de convergence où la première était indéterminée.

de Cauchy sur les séries divergentes, c'est que le grand géomètre n'a jamais perdu de vue cette question et a cherché constamment à atténuer cette proposition « un peu dure », suivant ses propres termes, *qu'une série divergente n'a pas de somme*. Les successeurs immédiats de Cauchy, au contraire, ont accepté cette proposition sans atténuation ni restriction. Ils conservèrent seulement le souvenir de la théorie relative à la série de Stirling; mais la possibilité d'utiliser pratiquement cette série divergente apparaissait comme une curiosité tout à fait isolée, et sans importance au point de vue des idées générales qu'on pouvait chercher à se faire sur l'Analyse.

Les séries divergentes depuis Cauchy.

8. On cessa donc, après la mort de Cauchy (1857), de se préoccuper des séries divergentes; c'est seulement plus de vingt ans après que paraît, en connexion avec cette question, un Mémoire de Laguerre sur l'intégrale (1)

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}.$$

Mais ce Mémoire, dont nous reparlerons au début du Chapitre II, ne renferme qu'un fait isolé et ne paraissant pas pouvoir servir de base à une théorie générale. Cependant, quelques années plus tard, Stieltjes généralisa le résultat de Laguerre et créa la belle théorie que nous exposerons au Chapitre II.

Mais c'est à 1886 que remontent les premières recherches à la fois générales et rigoureuses sur des séries divergentes. A cette époque parurent simultanément deux Mémoires, l'un de Stieltjes (2), l'autre de H. Poincaré (3) sur les séries que le premier appelait *semi-convergentes* et le second *asymptotiques*. C'est ce dernier terme qui a prévalu. La théorie de H. Poincaré a d'ailleurs,

(1) *Œuvres de Laguerre*, t. I, p. 428; *Bull. de la Soc. math. de France*, t. VII.

(2) Stieltjies, *Recherches sur quelques séries semi-convergentes* (*Ann. Éc. Norm.*, 1886).

(3) Poincaré, *Acta Mathem.*, t. VIII.

comme on le verra au Chapitre I, une portée bien plus haute que celle de Stieltjes.

Ce qui caractérise la théorie de H. Poincaré et lui donne sa grande importance, c'est qu'elle est basée essentiellement sur la possibilité d'appliquer aux séries asymptotiques, moyennant certaines conditions précises, les règles du calcul algébrique et du calcul intégral. Les opérations ainsi effectuées correspondent exactement aux opérations analogues effectuées sur les fonctions que l'on fait correspondre aux séries. C'est là le fait essentiel qui est le fondement de la théorie de H. Poincaré et qui doit être *mutatis mutandis* le fondement de toute théorie des séries divergentes qui aspire à être susceptible d'applications.

On trouvera dans les Chapitres III, IV et V l'exposé de travaux plus récents sur les séries divergentes, travaux auxquels M. Émile Borel a pris une part importante. Les principes fondamentaux qui l'ont guidé, principes qui dérivent des remarques présentées à propos de la théorie de H. Poincaré, sont ceux qui, aujourd'hui encore, continuent à dominer la théorie générale des séries divergentes.

9. Le problème fondamental est le suivant : Faire correspondre à chaque série divergente numérique d'une classe aussi large que possible, un nombre tel que la substitution de ce nombre à la série, dans les calculs usuels où elle peut se présenter, donne des résultats exacts, ou du moins presque toujours exacts. Ce problème en appelle d'autres et notamment les suivants :

1° Fixer avec précision la classe des séries que l'on considérera ;

2° Énumérer les opérations qu'il est permis d'effectuer sur ces séries, en utilisant leur somme conventionnelle.

La question étant posée sous cette forme, on conçoit aisément qu'elle puisse admettre différentes solutions, ou, si l'on préfère, qu'il existe différents procédés de sommation, c'est-à-dire diverses manières de définir la somme conventionnelle. Suivant le procédé de sommation que l'on a choisi, la classe des séries auxquelles il s'applique se trouve délimitée de telle ou telle manière, en même temps que telles ou telles opérations simples sont admises.

En fait, nous verrons que l'on a proposé des procédés de som-

mation extrêmement variés. Notons d'abord leurs caractères communs :

1° Chacun de ces procédés satisfait à la *condition de permanence*, qu'on peut formuler ainsi : la classe des séries auxquelles s'applique la méthode de sommation considérée comprend et dépasse la classe des séries convergentes; en outre la somme que cette méthode assigne à une telle série est égale à sa somme, au sens ordinaire. Cette condition bien naturelle et déjà signalée par M. Émile Borel a été systématiquement introduite par le géomètre anglais G. Hardy (¹), sous le nom de « *consistency-condition* ». Nous préférons employer ici la dénomination *condition de permanence*, due à M. Conrad Knopp (²).

2° Nous demanderons encore à la série de terme général $au_n + bv_n$ d'être sommable par la méthode en question, à partir du moment où les séries de termes généraux u_n et v_n sont elles-mêmes sommables par cette méthode, la somme de $au_n + bv_n$ devant égaler $aU + bV$, si U et V sont les sommes des séries u_n et v_n, et la propriété devant avoir lieu quelles que soient les constantes a et b. C'est ce que nous appellerons la *condition de distributivité*.

Tous les procédés de sommation satisfont à la fois à la condition de permanence et à la condition de distributivité. Il y a lieu de considérer dans cette théorie d'autres conditions de forme simple, mais qui pourront être ou non satisfaites suivant le procédé de sommation employé. De leur validité dépendra la souplesse plus ou moins grande de la méthode, qui se prêtera à des transformations de calcul plus ou moins larges. Voici un exemple d'une condition de ce genre :

Si la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est sommable et admet U pour somme, la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

l'est également et a pour somme $U - u_0$.

(¹) *On differentiation and integration of divergent series* (*Trans. Cambr. Phil. Soc.*, 1903, p. 297-321).

(²) *Ueber das Eulersche Summierungsverfahren* (*Math. Zeitschr.*, 1922, p. 226-253).

C'est ce que nous appellerons la *condition de semi-associativité* : lorsquelle est remplie [1], il est manifeste que la série obtenue en supprimant les n premiers termes d'une série sommable, est également sommable et que sa somme s'obtient en retranchant de la somme de la série initiale celle de ces n termes.

La valeur pratique d'un procédé de sommation dépend encore de la facilité avec laquelle il fournira des règles relatives à la multiplication des séries. Notons qu'étant donnée une classe de séries, sommables par un procédé particulier, on doit en général formuler des conditions restrictives pour que la série produit formel, déduite de deux séries de cette classe par la règle de Cauchy, appartienne à la même classe et soit, à ce titre, sommable par le procédé considéré : pour comprendre la nécessité de telles restrictions, il suffit de rappeler que le produit formel de deux séries simplement convergentes (c'est-à-dire dont la convergence n'est pas absolue) n'est pas en général une série convergente. Si l'on suppose que chacun des facteurs converge absolument, on est assuré que le produit formel présente ce même caractère et a pour somme le produit des sommes des deux séries.

Enfin, la valeur pratique d'un procédé de sommation dépendra du résultat qu'il donne, lorsqu'on l'applique au développement taylorien d'une fonction analytique hors de son cercle de convergence et notamment à la série

$$1 + u + u^2 + \dots,$$

dont la somme devra être égale à $(1 - u)^{-1}$. S'il en est bien ainsi, dans des conditions très larges, le procédé pourra s'appliquer au prolongement analytique d'une fonction quelconque, en raison du rôle dévolu à la fonction particulière précédente (où $uz = x$) dans l'intégrale de Cauchy.

10. Complétons les généralités précédentes par quelques remarques. La condition de distributivité, applicable à un nombre fini quelconque de séries sommables d'une certaine classe, ne l'est plus pour une suite infinie de séries : même dans la classe des

[1] Par exemple, c'est ce que nous avons supposé dans l'énoncé final du n° 3 relatif à la validité de la règle d'Euler.

séries convergentes, il faudrait alors énoncer, en vue de formuler un résultat positif, des restrictions convenables. Pareillement nous avons mentionné la condition de semi-associativité, satisfaite par certains procédés de sommation. Il est clair que le remplacement de termes consécutifs par leur somme ne saurait être admis si cette opération est répétée une infinité de fois : nous l'avons vu à propos de la série d'Euler lorsqu'elle offre des termes manquants, chacun de ces groupes de termes étant remplacé par sa somme effectuée, c'est à-dire par zéro; cela modifie la somme de la série. On ne saurait davantage changer l'ordre des termes, puisque cela n'est déjà pas légitime pour les séries non absolument convergentes et modifie leur somme (1). Ici, plus que jamais, apparaît donc la nécessité de considérer, dans une série, le rang de chaque terme comme faisant partie intégrante de ce terme.

11. Laissant maintenant de côté les séries divergentes numériques, passons aux séries dont les termes sont fonctions d'une variable. La théorie des séries de fonctions tantôt convergentes, tantôt divergentes, suivant la valeur de la variable, se rattache à la théorie déjà citée du prolongement analytique; nous en parlerons dans le Chapitre IV. Nous nous attacherons ici de préférence aux séries de fonctions toujours divergentes.

Ce problème est naturellement une application de l'étude des séries divergentes numériques, mais il y a lieu de tenter l'étude de la fonction définie par la série sans passer par l'intermédiaire de ses valeurs numériques : c'est pourquoi nous distinguons ce nouveau problème. Le cas particulier le plus important est celui des séries de puissances toujours divergentes, parce que l'exercice des opérations usuelles sur des séries de puissances donne de nouvelles séries de puissances. Ces séries se présentent comme intégrales vérifiant formellement certaines équations différentielles et

---

(1) On peut, pour ces séries, donner une condition suffisante pour que le changement de l'ordre des termes n'altère pas la somme. Soit δ_n l'entier exprimant le déplacement du terme de rang n de la série, c'est-à-dire la différence entre les rangs dans la série primitive et dans la série modifiée. La condition est que, quel que soit p, on ait

$$\lim_{n=\infty} \delta_{n-p} u_n = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n=\infty} \delta_n u_{n+p} = 0$$

(Borel, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1890).

il est indiqué de chercher à déterminer, au moyen de ces séries, les fonctions intégrales. Nous aurons à nous occuper de cette question dès les deux premiers Chapitres de ces Leçons. Nous montrerons au Chapitre I les services que peut rendre un développement du type

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} \quad \ldots, \tag{1}$$

vérifiant formellement une équation différentielle linéaire pour l'étude asymptotique des intégrales de cette équation. A côté de ce genre de considérations, introduites par H. Poincaré, nous exposerons, au Chapitre II, une véritable théorie de la sommation de développements de la forme (1), due à Stieltjes. Pour étudier les conditions dans lesquelles on peut attribuer une somme à un développement de la forme (1), il importe de restreindre (au moins au début des recherches) la généralité en étudiant par exemple le cas particulier où les coefficients c_n sont tous positifs, ou encore le cas équivalent (qui s'en déduit par le changement de signe de z) où les c_n sont alternativement positifs et négatifs. On doit alors chercher sinon à prévoir la forme générale des fonctions analytiques admettant un tel développement, du moins à distinguer parmi elles certaines classes privilégiées. C'est justement ce qu'a fait Stieltjes en considérant les fonctions représentées par une intégrale

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{df(u)}{z+u},$$

où $f(u)$ désigne une fonction croissante quelconque [1]; ces fonctions admettent pour coupure la portion négative de l'axe réel, ou tout au moins possèdent sur cet axe un ensemble singulier ayant le point à l'infini pour point limite. Pour que le développement (1) représente une telle fonction, il faut particulariser la suite des c_n. Un sens précis s'attache alors à la locution *somme de la série*, de manière que, si une série de Stieltjes vérifie formellement une équation différentielle algébrique

$$F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}] = 0,$$

[1] Cette notation est celle de l'intégrale de Stieljes; nous reviendrons sur sa signification au n° 29 [*voir* la note ([1])].

sa somme définie par l'intégrale précédente est une solution de cette équation.

On est donc conduit à se demander dans quels cas on peut faire correspondre à un développement (1) une fonction $f(z)$ telle que, si ce développement vérifie formellement une équation différentielle algébrique, la fonction $f(z)$ correspondante en soit une intégrale. Nous connaissons jusqu'à présent deux cas où il en est bien ainsi : celui où le développement (1) converge (une intégrale est alors sa somme, au sens classique) et le cas découvert par Stieltjes. Nous apprendrons au Chapitre III, avec M. Borel, à distinguer une infinité de cas analogues, dont l'ensemble embrasse les précédents. Par là, prendra un sens bien précis le problème de la sommation des séries de Taylor à rayon de convergence nul. Enfin, au Chapitre VI, nous dirons quelques mots de la théorie des fonctions quasi-analytiques de variable réelle, récemment édifiée par MM. Denjoy et Carleman, et des nouveaux aspects sous lesquels elle permet d'envisager la sommation des développements de Taylor divergents. Cette théorie tire d'ailleurs son origine d'idées de M. Borel, qui seront exposées au Chapitre V, et dont une étude plus complète a été présentée par lui dans ses belles *Leçons sur les fonctions monogènes d'une variable complexe*.

CHAPITRE I.

LES SÉRIES ASYMPTOTIQUES.

Cauchy et la série de Stirling.

12. Nous avons mentionné les premières recherches sur les séries asymptotiques, dues à Cauchy [1] et relatives principalement à la série de Stirling; cette série, la première série divergente employée pratiquement, sert à calculer la fonction eulérienne

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx$$

quand z est très grand. En intégrant par parties, on obtient

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

d'où l'on déduit, pour les valeurs entières de n,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Lorsque n est grand, le calcul de $n!$ est pénible, et cependant il importe, notamment dans diverses questions de probabilités, d'en connaître une valeur approchée.

Nous partirons de la formule suivante, qu'on démontre dans les cours d'Analyse (*voir* par exemple JORDAN, 2e édition, t. II, p. 180) :

$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \varpi(z)$$

avec

$$\varpi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-zx}\frac{dx}{x}.$$

---

(1) CAUCHY, *Comptes rendus*, t. XVII, 28 août 1843, p. 370. — *Œuvres*, 1re série, t. VIII, p. 18.

Le calcul de $\Gamma(z)$ se ramène donc à celui de $\varpi(z)$: nous supposerons z réel et positif, ce cas étant seul intéressant dans les applications.

L'intégrale prise à partir de zéro a un sens. On a en effet

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{x\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}-\frac{x^3}{4!}+\ldots\right)} = \frac{1}{x}+\frac{1}{2}+Ax+Bx^2+\ldots,$$

donc

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x} = (A+Bx+\ldots)\,dx$$

et l'on voit que le coefficient de dx est fini pour $x=0$. Il en résulte immédiatement que $\varpi(z)$ tend vers zéro si z croît indéfiniment : il est donc naturel de développer cette fonction suivant les puissances de $\frac{1}{z}$. On a

$$\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}-\frac{1}{x} = \frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2}-\frac{1}{x}.$$

En se servant de la formule

$$\pi\cot\pi z-\frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

pour

$$z = \frac{ix}{2\pi},$$

on obtient

$$\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2} = 2\sum_{1}^{\infty}\frac{x}{x^2+4n^2\pi^2}$$

et par suite, en exécutant un calcul purement formel [1] :

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x} = 2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2+4n^2\pi^2}$$

$$= 2\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{4n^2\pi^2}-\frac{x^2}{(4n^2\pi^2)^2}+\frac{x^4}{(4n^2\pi^2)^3}\ldots\right].$$

---

[1] Le dernier développement n'est valable que pour $|x|<2n\pi$, alors que nous nous disposons à intégrer dans un intervalle infini.

D'ailleurs

$$2\sum_1^\infty \frac{1}{(4n^2\pi^2)^p} = \frac{1}{2^{2p-1}\pi^{2p}} \sum_1^\infty \frac{1}{n^{2p}} = \frac{B_p}{(2p)!}$$

en posant

$$B_p = 2\frac{(2p)!}{(2\pi)^{2p}}\left(1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \ldots\right).$$

Les nombres B_p ainsi définis sont les *nombres de Bernoulli;* ils sont rationnels, car pour développer en série $\cot z$, il suffit de diviser l'un par l'autre les développements de $\cos z$ et $\sin z$, qui sont tous deux à coefficients rationnels.

Nous aurons alors

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x} = \frac{B_1}{2!} - \frac{B_2}{4!}x^2 + \frac{B_3}{6!}x^4 - \ldots$$

et l'intégrale $\varpi(z)$ peut s'écrire formellement

$$\varpi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{B_1}{2!} - \frac{B_2}{4!}x^2 + \frac{B_3}{6!}x^4 - \ldots\right)e^{-zx}\,dx.$$

Nous aurons donc à calculer des intégrales de la forme

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-zx}\,dx$$

qui se ramènent aux fonctions Γ en posant $zx = y$, ce qui ne change pas les limites puisque z est réel et positif. On obtient

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-zx}\,dx = \frac{1}{z^{2n+1}}\int_0^\infty y^{2n}e^{-y}\,dy = \frac{\Gamma(2n+1)}{z^{2n+1}} = \frac{(2n)!}{z^{2n+1}}.$$

On trouve donc

$$\varpi(z) = \frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{z} - \frac{B_2}{3.4}\,\frac{1}{z^3} + \frac{B_3}{5.6}\,\frac{1}{z^5}\ldots.$$

Or les nombres de Bernoulli de rang élevé augmentent rapidement avec leur indice, car on a

$$\frac{B_{p+1}}{B_p} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{4\pi^2}\,\frac{1 + \frac{1}{2^{2p+2}} + \frac{1}{3^{2p+2}} + \ldots}{1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \ldots},$$

d'où

$$\frac{B_{p+1}}{B_p} > \frac{(2p+1)(2p+2)}{4\pi^2} \frac{1}{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots} > A(2p+1)(2p+2)$$

A étant une constante.

Donc ce rapport croît indéfiniment avec p.

Le rapport d'un terme au précédent de la série $\varpi(z)$ a pour valeur absolue

$$\frac{B_{p+1}}{B_p} \frac{(2p+1)2p}{(2p+1)(2p+2)} \frac{1}{z^2}$$

et par suite, quel que soit z, il croît aussi indéfiniment en même temps que p.

Le développement formel que nous avons trouvé pour $\varpi(z)$ est donc divergent; néanmoins Cauchy a montré que, sans qu'il soit besoin de faire d'autre calcul, on peut légitimement employer développement trouvé pour le calcul approximatif de $\varpi(z)$.

Nous avions à calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \left(\sum_1^\infty \frac{2}{x^2+4n^2\pi^2}\right) e^{-zx}\,dx.$$

Or, Cauchy a fait la remarque suivante : si l'on désigne par a et par y des nombres positifs et que l'on considère le quotient

$$\frac{1}{a+y} = \frac{1}{a} - \frac{y}{a^2} + \frac{y^2}{a^3} - \ldots + (-1)^n \frac{y^n}{a^{n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{y^{n+1}}{a^{n-1}(a+y)}$$

la progression géométrique obtenue peut converger ou non, mais la valeur absolue du reste est toujours plus petite, soit que le dernier terme calculé, soit que le premier terme négligé.

Cette propriété, vraie pour des progressions géométriques, le sera encore pour des sommes de progressions géométriques, de raison négative.

Nous avons obtenu le développement

$$\sum_1^\infty \frac{2}{4n^2\pi^2+x^2} = \frac{B_1}{2!} - \frac{B_2 x^2}{4!} + \frac{B_3 x^4}{6!} - \ldots$$

comme une somme de telles progressions. Donc, en nous arrêtant au terme $(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p)!}x^{2p-2}$, l'erreur sera $\theta\frac{B_{2p+1}}{(2p+2)!}x^{2p}$, où $|\theta|$ est inférieur à l'unité. Dans l'intégration qui donne $\varpi(z)$, le

terme complémentaire précédent donnera comme coefficient de $\frac{B_{p+1}}{(2p+2)!}$

$$\int_0^\infty \theta x^{2p} e^{-zx}\,dx = \theta_1 \int_0^\infty x^{2p} e^{-zx}\,dx = \theta_1 \frac{\Gamma(2p+1)}{z^{2p+1}} = \theta_1 \frac{(2p)!}{z^{2p+1}},$$

c'est-à-dire que la propriété fondamentale des progressions : *l'erreur est plus petite que le premier terme négligé*, subsiste si l'on multiplie par e^{-zx} et si l'on intègre. Elle appartient donc à la série obtenue pour $\varpi(z)$ et l'on a

$$\varpi(z) = \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{z} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{z^3} - \dots (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{z^{2n-1}}$$
$$\frac{B_{n+1}\theta_1}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{z^{2n+1}} \qquad |\theta_1| < 1.$$

Il est donc possible d'utiliser cette série divergente pour calculer $\varpi(z)$ et par suite $\log\Gamma(z)$. Si l'on s'arrête à un terme de rang n fixé d'avance, il résulte du calcul précédent qu'on peut prendre z assez grand pour que l'erreur soit une fraction arbitrairement petite, en valeur absolue, du dernier terme écrit. A plus forte raison, si pour chaque valeur de z, on a soin de s'arrêter au terme le plus petit, obtiendra-t-on, lorsque z augmente, une approximation relative considérable.

On voit que la méthode de Cauchy ne s'applique pas seulement à la série de Stirling, mais s'étend immédiatement à une classe étendue de séries analogues.

La théorie de H. Poincaré.

13. L'idée de chercher à construire une théorie générale des séries asymptotiques paraît être venue simultanément à Stieltjes et à H. Poincaré [1].

Nous dirons d'abord quelques mots des idées de Stieltjes. Il se propose, en partant d'une fonction déterminée, d'étudier cette fonction pour les valeurs très grandes de la variable.

---

[1] Stieltjes employait la dénomination de séries semi-convergentes, qui prête à confusion, car elle sert aujourd'hui à désigner les séries non absolument convergentes. Nous optons ici pour la locution « série asymptotique » employée par H. Poincaré.

Considérons une fonction $F(a)$ d'une variable positive a. Supposons que, lorsque a augmente indéfiniment, cette fonction ait une limite

$$\lim_{a=\infty} F(a) = C_0.$$

On peut dire que C_0 donne une approximation de $F(a)$ pour une valeur très grande de a. Cherchons si l'on peut trouver une approximation meilleure. Dans ce but, remarquons que $F(a) - C_0$ tendant vers zéro, il se peut que le produit par a de cette quantité ait une limite

$$\lim_{a=\infty} a[F(a) - C_0] = C_1,$$

ou

$$\lim_{a=\infty} a\left[F(a) - C_0 - \frac{C_1}{a}\right] = 0.$$

Il se peut encore que l'on ait

$$\lim_{a=\infty} a^2\left[F(a) - C_0 - \frac{C_1}{a}\right] = C_2$$

et ainsi de suite.

On est conduit à écrire

$$F(a) = C_0 + \frac{C_1}{a} + \frac{C_2}{a^2} + \ldots.$$

Il pourra arriver que le développement ainsi trouvé soit divergent. On peut alors se demander si ce développement ne peut tout de même être utile pour le calcul de la fonction $F(a)$. On écrira

$$F(a) = C_0 + \frac{C_1}{a} + \ldots + \frac{C_n}{a^n} + R_n,$$

et la question se posera d'étudier R_n; selon le résultat de cette étude, on se servira ou non de la série. On n'aura pas à proprement parler à étudier une série divergente, mais plutôt une certaine fonction R_n.

Stieltjes a fait observer qu'on avait surtout étudié auparavant les séries pour lesquelles les signes sont alternés et qu'il appelle *séries de première espèce*, donnant le nom de *séries de seconde espèce* à celles dont tous les termes ont le même signe.

En général, les séries de première espèce sont telles que le reste R_n est inférieur au dernier terme calculé ou au premier

terme négligé. On peut calculer ces séries sans scrupule, aussi loin qu'elles paraissent converger : c'est à elles que nous avons fait allusion au début de l'Introduction ; la série de Stirling en est un exemple.

Considérons maintenant une série de seconde espèce, par exemple

$$F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2!}{a^3} + \ldots + \frac{(n-1)!}{a^n} + R_n.$$

Si a est déterminé, ainsi que $F(a)$, le reste R_n, quand n augmente indéfiniment, sera d'abord positif, puis négatif et décroîtra jusqu'à $-\infty$. Il s'agit en somme de déterminer la valeur de n pour laquelle R_n se rapprochera le plus possible de zéro.

La série précédente se rencontre dans l'étude du logarithme intégral, transcendante définie pour $x < 1$ par la formule

$$li(x) = \int_0^x \frac{du}{\log u},$$

et pour $x > 1$ par

$$li(x) = \lim_{\varepsilon=0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{du}{\log u} \right);$$

on constate aisément que cette limite existe lorsque ε tend vers zéro. Plaçons-nous dans ce dernier cas, et remplaçons x par e^a $(a > 0)$ dans le logarithme intégral. En posant

$$u = e^{a(1-v)}, \qquad \text{d'où} \qquad du = -a e^a e^{-av}\, dv,$$

on trouve aisément

$$li(e^a) = e^a \lim_{\varepsilon=0} \left(\int_0^{1-\varepsilon'} \frac{e^{-av}}{1-v}\, dv + \int_{1+\varepsilon''}^{+\infty} \frac{e^{-av}}{1-v}\, dv \right),$$

où ε' et ε'' désignent les infiniment petits équivalents définis par

$$\varepsilon' = \frac{\log(1+\varepsilon)}{a}, \qquad \varepsilon'' = -\frac{\log(1-\varepsilon)}{a}.$$

On peut encore écrire

$$\begin{aligned} li(e^a) &= e^a \int_0^\infty e^{-av}(1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1})\, dv \\ &\quad + e^a \lim_{\varepsilon=0} \left(\int_0^{1-\varepsilon'} \frac{v^n e^{-av}}{1-v}\, dv + \int_{1+\varepsilon''}^{+\infty} \frac{v^n e^{-av}}{1-v}\, dv \right) \\ &= e^a \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2!}{a^3} + \ldots + \frac{(n-1)!}{a^n} + R_n \right], \end{aligned}$$

avec

$$R_n = \lim_{\varepsilon=0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{v^n e^{-av}}{1-v} dv + \int_{1+\varepsilon''}^{\infty} \frac{v^n e^{-av}}{1-v} dv \right).$$

On obtient donc bien le développement divergent annoncé. On pourrait d'ailleurs représenter le logarithme intégral par un développement convergent; mais Stieltjes a montré que le développement divergent donne des résultats meilleurs ([1]).

14. La méthode de H. Poincaré est plus générale. Elle permet d'étudier les intégrales d'un grand nombre d'équations différentielles ([2]). Son principe consiste, après avoir défini la correspondance entre une fonction et une série asymptotique, à constater que cette correspondance se conserve dans la plupart des opérations simples.

Considérons une fonction $J(x)$ et le développement

$$C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots.$$

Nous dirons que ce développement, qui peut être divergent, *représente asymptotiquement* la fonction $J(x)$, si en posant

$$\varepsilon_n = x^n \left[J(x) - \left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \ldots + \frac{C_n}{x^n} \right) \right], \tag{1}$$

on a, quel que soit n,

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{2}$$

S'il existe pour une fonction $J(x)$ un développement asymptotique ([3]), les coefficients c_0, c_1, c_2, ... de ce développement

---

([1]) Stieltjes, *Recherches sur quelques séries semi-convergentes* (*Ann. Éc. Norm.*, 1886).

([2]) Poincaré, *Sur les intégrales singulières des équations differentielles* (*Acta Math.*, t. VIII).

([3]) Un cas où ce développement existe est celui où la fonction

$$\varphi(t) = J\left(\frac{1}{t}\right)$$

admet par rapport à t, pour $t > 0$, des dérivées de tous les ordres, continues pour $t = 0$. Dans ce cas, la possibilité d'effectuer la somme, la différence ou le produit de deux développements asymptotiques, ou encore de calculer le déve-

s'obtiendront comme nous l'avons expliqué à propos des recherches de Stieltjes : ce développement sera donc unique. Malheureusement, la réciproque n'est pas vraie; en vertu de notre définition, toute fonction de la forme

$$e^{-x}\varphi_1(x)+e^{-x^2}\varphi_2(x)+\ldots+e^{-x^n}\varphi_n(x),$$

où φ_1, φ_2, ..., φ_n sont des fonctions demeurant comprises, quel que soit x, entre deux nombres fixes, est représentée asymptotiquement pour x infini et positif, par un développement asymptotique identiquement nul [1]. Ceci montre immédiatement l'existence d'un ensemble très étendu de fonctions admettant un même développement asymptotique. Ce n'est qu'en l'assujettissant à d'autres conditions qu'on déterminera la fonction représentée par une telle série; par exemple, si l'on considère une équation différentielle, le fait que la fonction cherchée est une intégrale, suffira souvent pour que son développement asymptotique la détermine.

15. Maintenant que nous avons défini la représentation asymptotique des fonctions, étudions ce que devient cette représentation quand on effectue sur les fonctions des opérations simples. Supposons que l'on ait, quel que soit n,

$$\mathrm{J}(x)=c_0+\frac{c_1}{x}+\ldots+\frac{c_n+\varepsilon_n}{x^n},$$

$$\mathrm{J}'(x)=c'_0+\frac{c'_1}{x}+\ldots+\frac{c'_n+\varepsilon'_n}{x^n},$$

ε_n et ε'_n tendant vers zéro pour x infini et positif. On aura, par

---

loppement d'une fonction $\psi[\varphi(t)]$, où ψ est soumise aux mêmes hypothèses que φ [au voisinage de la valeur $\varphi(0)$ de φ], apparaît comme une conséquence immédiate des règles de calcul des dérivées d'ordre quelconque. Mais il importe de noter que ce cas, malgré sa grande importance pratique, n'est pas le cas général. En effet, dans les hypothèses où nous nous sommes placés, toutes les dérivées de la fonction considérée admettront elles-mêmes des développements asymptotiques qu'on déduira par dérivation terme à terme du développement initial. Or nous verrons plus loin qu'une fonction peut admettre un développement asymptotique, sans que ses dérivées jouissent nécessairement de la même propriété.

[1] Même propriété pour des combinaisons linéaires finies ou des intégrales (par rapport à α) de fonctions $e^{-x^\alpha}\varphi(x,\alpha)$, φ étant bornée et α demeurant positif.

addition,

$$J(x)+J'(x)=c_0+c'_0+\frac{c_1+c'_1}{x}+\ldots+\frac{c_n+c'_n+(\varepsilon_n+\varepsilon'_n)}{x^n},$$

et par multiplication

$$J(x)\,J'(x)=c_0c'_0+\frac{c_0c'_1+c_1c'_0}{x}+\ldots+\frac{c_0c'_n+\ldots c_nc'_0}{x^n}+\frac{\eta}{x^n},$$

avec

$$\eta=c_0\varepsilon'_n+c'_0\varepsilon_n+\frac{c_1(c'_n+\varepsilon'_n)+c_2c'_{n-1}+\ldots+(c_n+\varepsilon_n)c'_1}{x}+\ldots$$
$$+\frac{(c_n+\varepsilon_n)(c'_n+\varepsilon'_n)}{x^n},$$

relation qui montre que η est infiniment petit avec $\frac{1}{x}\cdot$ On peut donc ajouter ou multiplier deux développements asymptotiques; on pourra donc effectuer aussi l'élévation à une puissance quelconque, ou plus généralement calculer un polynome de la forme

$$F(J)=A_0+A_1J+\ldots+A_pJ^p.$$

On peut aller plus loin, et *remplacer*, moyennant certaines précautions, *le polynome précédent par une série convergente* (¹).

Soit

$$f(J)=A_0+A_1J+\ldots+A_pJ^p+\ldots$$

une série convergente dont le rayon ρ de convergence surpasse $|c_0|$: dès lors, la série convergera pour x assez grand et représentera une certaine fonction de x, soit $f(J)=F(x)$. Je dis que cette fonction est susceptible d'une représentation asymptotique que l'on obtiendra en remplaçant J dans la série f, par la série asymptotique correspondante et effectuant les calculs. On a

$$\lim_{x=\infty}F(x)=A_0+A_1c_0+\ldots+A_pc_0^p+\ldots=C_0,$$
$$F(x)-C_0=A_1(J-c_0)+\ldots+A_p(J^p-c_0^p)+\ldots.$$

Calculons $\lim x\,[F(x)-C_0]$. Nous savons que $x(J^p-c_0^p)$ a une limite bien déterminée. Il suffit, pour avoir cette limite, d'élever à

(¹) Nous avons signalé, dans le cas particulier où la fonction $J\left(\frac{1}{t}\right)$ admet pour $t=0$ des dérivées continues de tous les ordres et où l'on fait sur f une hypothèse analogue, un énoncé moins restrictif.

la puissance p le développement asymptotique de $J(x)$

$$J^p(x) = c_0^p + \frac{p c_0^{p-1} c_1}{x} + \ldots.$$

On a donc

$$\lim x(J^p - c_0^p) = p c_0^{p-1} c_1.$$

Nous connaîtrons donc la limite C_1 de $x[F(x) - C_0]$. On obtient

$$C_1 = c_1(A_1 + 2A_2 c_0 + \ldots + pA_p c_0^{p-1} + \ldots),$$

la série étant visiblement convergente, d'après l'hypothèse faite sur le rayon de convergence de $f(J)$.

En continuant ainsi, nous verrions qu'il suffit de remplacer partout $J(x)$ par son développement asymptotique pour avoir celui de $F(x)$. L'emploi de la formule de Taylor montre que les développements successifs définissant les C_n s'expriment linéairement au moyen d'un nombre fini des séries $f'(c_0)$, $f''(c_0)$, ..., qui sont toutes convergentes par hypothèse.

Passons au cas de la division : $J(x)$ étant représentée comme précédemment, considérons $\frac{1}{J(x)}$. Nous pourrons l'écrire

$$\frac{1}{J(x)} = \frac{1}{c_0[1 + \Phi(x)]},$$

avec

$$\Phi(x) = \frac{c_1}{c_0 x} + \frac{c_2}{c_0 x^2} + \ldots;$$

or on a

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{c_0}[1 - \Phi + \Phi^2 - \Phi^3 + \ldots].$$

Cette série est convergente si $|\Phi| < 1$. Mais Φ tend vers zéro lorsque x devient infini. La condition $\rho > |c_0|$ étant remplie, on peut, en supposant $c_0 \neq 0$, diviser l'unité par $J(x)$, et l'on obtiendra comme quotient le développement asymptotique de $\frac{1}{J(x)}$. On peut par suite diviser l'une par l'autre deux séries asymptotiques, pourvu que le premier terme c_0 de la série diviseur ne soit pas nul.

16. Nous allons voir maintenant qu'*il est permis d'intégrer une série asymptotique.*

Supposons que l'on ait asymptotiquement

$$\mathrm{J}(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x_2} + \ldots + \frac{c_m}{x^m} + \ldots.$$

Je dis que l'on aura de même

$$\int_x^\infty \left[\mathrm{J}(x) - c_0 - \frac{c_1}{x}\right] dx = \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{2x^2} + \ldots + \frac{c_m}{(m-1)x^{m-1}} + \ldots.$$

$\Big($Nous faisons passer c_0 et $\frac{c_1}{x}$ dans le premier membre pour ne pas introduire d'intégrales dépourvues de sens.$\Big)$

Nous pouvons écrire

$$\mathrm{J}(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots + \frac{c_m + \varepsilon_m}{z^m}.$$

En intégrant, nous aurons

$$\int_x^{\mathrm{X}} \left[\mathrm{J}(z) - c_0 - \frac{c_1}{z}\right] dz = \int_x^{\mathrm{X}} \left(\frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_m}{z^m}\right) dz + \int_x^{\mathrm{X}} \frac{\varepsilon_m}{z^m} dz,$$

où ε_m tend vers zéro lorsque z croît indéfiniment.

Donc, le second membre tend vers une limite quand X croît indéfiniment. Il en est de même du premier et l'on peut écrire

$$\int_x^\infty \left[\mathrm{J}(z) - c_0 - \frac{c_1}{z}\right] dz = \frac{c_2}{x} + \frac{1}{2}\frac{c_3}{x^2} + \ldots + \frac{1}{m-1}\frac{c_m}{x^{m-1}} + \frac{\eta_m}{x^{m-1}},$$

η_m tendant vers zéro quand x croît indéfiniment. En effet,

$$\left|\int_x^\infty \frac{\varepsilon_m}{z^m} dz\right| < \mu_m \int_x^\infty \frac{dz}{z^m},$$

μ_m étant la plus grande des valeurs que prend $|\varepsilon_m|$ lorsque z est compris entre x et $+\infty$. Donc

$$\left|\int_x^\infty \frac{\varepsilon_m}{z^m} dz\right| < \frac{\mu_m}{m-1}\frac{1}{x^{m-1}}.$$

On peut donc écrire

$$\int_x^\infty \frac{\varepsilon_m}{z^m} dz = \frac{\eta_m}{x^{m-1}} \quad \text{avec} \quad \eta_m = \theta\,\frac{\mu_m}{m-1}, \quad \text{où } |\theta| < 1.$$

η_m tend donc bien vers zéro. Par conséquent l'intégrale

$$\int_x^\infty \left[\mathrm{J}(z) - c_0 - \frac{c_1}{z}\right] dz$$

a bien pour développement asymptotique celui que nous avons indiqué.

Nous écrirons cette intégrale

$$\int_{x_0}^\infty \left[\mathrm{J}(z) - c_0 - \frac{c_1}{z}\right] dz - \int_{x_0}^{x} \left[\mathrm{J}(z) - c_0 - \frac{c_1}{z}\right] dz.$$

La première intégrale est une constante que nous appellerons C_0. Nous aurons alors

$$\int_x^\infty \left[\mathrm{J}(z) - c_0 - \frac{c_1}{z}\right] dz = \mathrm{C}_0 - \int_{x_0}^{x} \mathrm{J}(z)\, dz + c_0(x - x_0) + c_1 \log \frac{x}{x_0}.$$

Nous pouvons maintenant donner l'expression de $\int_{x_0}^{x} \mathrm{J}(z)\, dz$.

On a

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{J}(z)\, dz = c_0 x + c_1 \log x + \mathrm{C} - \frac{c_2}{x} - \frac{1}{2}\frac{c_3}{x^2} - \ldots,$$

ce qui montre bien qu'on peut intégrer une série asymptotique. On déterminera C en donnant à x une valeur particulière. Le développement asymptotique ne commence pas ici par une constante, mais bien par deux termes

$$c_0 x + c_1 \log x,$$

qui augmentent indéfiniment avec x. C'est là une généralisation, due à H. Poincaré, de la définition du développement asymptotique, généralisation qu'on est naturellement conduit à introduire dans la théorie et que nous avons déjà rencontrée pour la série de Stirling.

D'une manière générale, dire qu'on a asymptotiquement

$$(1) \qquad \Phi(x) = f(x) + g(x) \left[c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots\right]$$

signifie que l'on a asymptotiquement, au sens initial,

$$\frac{\Phi(x)-f(x)}{g(x)} = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$$

Cette nouvelle définition est compatible avec l'ancienne; dans le cas où $f(x)$ et $g(x)$ admettent des développements asymptotiques au sens initial, il en est bien de même de $\Phi(x)$, dont le développement s'obtient en effectuant les calculs indiqués au second membre de l'équation (1). Mais la nouvelle définition embrasse aussi les cas où l'une au moins des fonctions f ou g n'admet plus de représentation asymptotique.

17. Il nous reste à examiner une dernière opération simple : *la différentiation*. Celle-là n'est pas applicable aux séries asymptotiques, du moins d'une manière générale (bien qu'en dérivant terme à terme un développement asymptotique, au sens initial, on obtienne un autre développement de même forme). En réalité, lorsque la différentiation est légitime, elle n'est qu'une application du théorème sur l'intégration. Tout ce qu'on peut dire, c'est que si l'on considère une série asymptotique représentant $F(x)$ et si la fonction $F'(x)$ admet un développement asymptotique, ce développement s'obtient nécessairement en dérivant celui de $F(x)$, car l'intégration du développement de $F'(x)$ doit donner celui de $F(x)$. Mais la fonction $F'(x)$ peut ne pas avoir de développement asymptotique.

Considérons par exemple, pour x infini et positif, la fonction

$$e^{-x}\sin(e^{x^2}).$$

Elle a un développement asymptotique identiquement nul. Or sa dérivée

$$e^{-x}\left[e^{x^2}2x\cos(e^{x^2}) - \sin(e^{x^2})\right]$$

ne tend pas vers zéro quand x tend vers $+\infty$: elle n'est donc pas susceptible d'un développement asymptotique.

18. Nous avons vu que l'ensemble des fonctions admettant un même développement asymptotique est extrêmement étendu. On

peut d'ailleurs prouver, et nous l'admettrons ([1]), que si l'on donne la suite des coefficients c_0, c_1, c_2, ..., il existe toujours des fonctions admettant le développement asymptotique

$$c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots, \tag{2}$$

quelle que soit la suite des coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ Soit $\Phi(t)$ la transformée d'une telle fonction obtenue en posant $x = \frac{1}{t}\cdot$ On peut dire qu'*à l'origine* et *vers la droite*, on a asymptotiquement

$$\Phi(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_m t^m + \ldots,$$

ce qui signifie que t étant positif et infiniment petit, on a pour chaque entier m

$$\Phi(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + (c_m + \varepsilon_m) t^m,$$

ε_m étant infiniment petit.

M. E. Borel, dans sa Thèse ([2]), a justifié le théorème précédent en prouvant notamment la possibilité de construire, dans l'intervalle $0 \leq t \leq 1$, une fonction indéfiniment dérivable $\Phi(t)$ telle qu'il existe pour cette fonction et toutes ses dérivées lorsque t tend vers zéro, des valeurs limites respectivement égales aux termes d'une suite arbitrairement donnée. Le degré d'indétermination reste encore extrêmement large, puisque si n est positif et $\alpha(t)$ algébrique en t, les fonctions $e^{-\frac{1}{t^n}}\alpha(t)$ s'annulent ainsi que toutes leurs dérivées à droite pour $t = 0$. Ce cas particulier des développements asymptotiques [déjà signalé, n° 14, note ([3])] est pratiquement le plus important pour les applications aux équations différentielles (*voir* n° 20).

([1]) *Voir* dans la même Collection l'Ouvrage de M. T. Carleman, *Sur les fonctions quasi-analytiques* (Chap. V).

([2]) *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XII, 1895). *Voir* aussi dans la Collection des monographies sur la théorie des fonctions les Livres de M. T. Carleman, *Sur les fonctions quasi-analytiques*, Chap. V, et de M. F. Riesz, *Les systèmes linéaires à une infinité d'inconnues*, p. 19.

Extension au champ complexe.

19. Dans ce cas, quelques précautions s'imposent. Particularisons de suite le problème en supposant que, pour une certaine valeur z_0, la fonction analytique $f(z)$ et ses dérivées de tous ordres admettent des limites respectivement égales aux termes de la suite

$$c_0, \quad c_1, \quad 2!\,c_2, \quad \ldots, \quad n!\,c_n, \quad \ldots.$$

Il faut alors préciser pour quels chemins cette propriété limite a lieu : par exemple, on peut supposer que $z - z_0$ tend vers zéro en suivant une droite, qu'on fixera en donnant l'argument α de $z - z_0$.

Lorsque cet argument varie, il faut en général délimiter un angle de sommet z_0 à l'intérieur duquel le développement est valable aux environs de z_0. Prenons par exemple $e^{-\frac{1}{z^n}}$. Lorsque z tend vers zéro par valeurs réelles et positives, cette fonction a un développement asymptotique dont tous les termes sont nuls. Si l'on pose $z = re^{i\alpha}$, il vient

$$e^{-\frac{1}{z^n}} = e^{-\frac{\cos n\alpha}{r^n}}(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad \text{où } \theta = \frac{\sin n\alpha}{r^n}.$$

Dès lors, le précédent développement ne sera valable que dans les secteurs où $\cos n\alpha$ est positif. Il y aura des arguments singuliers $\left(\text{ceux de la forme } \frac{2k\pi}{n}\right)$ qu'on ne pourra franchir. Si n n'était pas entier, nous aurions un exemple de fonction non uniforme sur lequel on voit que deux branches distinctes peuvent admettre la même représentation asymptotique.

19 *bis*. Nous admettrons la possibilité de déterminer dans un angle une fonction analytique $f(z)$ telle que cette fonction et ses dérivées admettent, pour les chemins intérieurs à l'angle et tendant vers le sommet, des valeurs limites respectivement égales aux termes d'une suite donnée [1].

Le caractère de l'indétermination comportée par ce problème ne

---

(1) *Voir* l'Ouvrage cité de M. T. Carleman, Chap. V.

lui est nullement particulier; c'est ce que montre une comparaison suggestive, due à M. Borel; elle ressort du tableau ci-dessous.

PROBLÈME A.

Trouver une $f(z)$, holomorphe dans un angle donné, de sommet $z=0$ et telle que

$$\lim_{z=0} f(z)=c_0, \quad \ldots, \quad \lim_{z=0}\frac{f^{(n)}(z)}{n!}=c_n. \quad \ldots$$

HYPOTHÈSE A₁. — *La série $\Sigma c_n z^n$ a son rayon de convergence $\neq 0$.*

Alors, il existe dans l'ensemble de toutes les solutions du problème A *une solution privilégiée*, c'est la fonction analytique obtenue comme *somme* (au sens classique) de la série et complétée par prolongement analytique.

HYPOTHÈSE A₂. — *La série $\Sigma c_n z^n$ a son rayon de convergence nul.*

Alors il n'existe, dans l'ensemble des solutions du problème A, aucune solution qui se distingue des autres.

PROBLÈME B.

Trouver une fonction entière $\varphi(z)$, qui prenne des valeurs données pour les valeurs entières (de signe quelconque) *de la variable.*

HYPOTHÈSE B₁. — *La série* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\varphi(n)}{n}\right|$ *converge.*

Alors, parmi toutes les solutions possibles

$$\Phi(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n\varphi(n)}{z-n}+\theta(z)\right]$$

[où $\theta(z)=$ fonct. ent. arbit.], il y a une solution privilégiée $\varphi(z)$, obtenue pour $\theta(z)=0$: elle se distingue en ce que $\dfrac{\varphi(z)}{\sin\pi z}$ tend vers zéro quand z s'éloigne dans une direction différente de l'axe réel.

HYPOTHÈSE B₂. — *La série* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\varphi(n)}{n}\right|$ *diverge.*

Soit $g(z)$ une fonction entière telle que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\varphi(n)}{n g(n)}\right|$ converge.

On peut écrire la solution générale :

$$\frac{\sin\pi z}{\pi}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n\varphi(n)g(z)}{(z-n)g(n)}+\theta(z)\right].$$

Pas de solution distinguée [1].

---

[1] Cette propriété négative résulte de la présence du facteur $g(z)$. Pour sa démonstration rigoureuse, nous renverrons le lecteur au Mémoire de M. Borel (*Ann. Éc. Norm.*, 1899, p. 85 et 86).

En résumé, les deux problèmes A et B appartiennent à un même type de problèmes linéaires à une infinité dénombrable d'inconnues, qui, en règle générale, sont indéterminés. On peut, dans des cas étendus, les rendre déterminés par des conditions supplémentaires, exprimées par des inégalités. Mais cela n'est possible que si les données vérifient des conditions convenables (hypothèses A_1 et B_1). Dans la suite, nous entendrons génériquement par *problèmes d'interpolation* une classe de problèmes comprenant notamment A et B et dont la discussion offre le caractère ci-dessus. Un de nos objectifs sera au fond de chercher à conserver au problème A une solution unique, moyennant une hypothèse A'_1 moins restrictive que A_1 (¹).

Applications aux équations différentielles.

20. Ainsi que nous l'avons dit, H. Poincaré a construit la théorie des séries asymptotiques en vue de l'intégration des équations différentielles. Soit une équation différentielle

$$F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}] = 0,$$

dont le premier membre est une fonction analytique des $n+2$ variables qu'elle renferme. Supposons qu'il existe une intégrale de cette équation admettant, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n, un développement asymptotique. Alors, des règles de calcul que nous avons données précédemment (règles qu'on étend facilement aux fonctions composées), il résulte que la fonction composée $F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]$ admettra elle-même un développement asymptotique; mais, puisque y est une intégrale, cette fonction composée est nulle. Donc, le développement asymptotique de y devra vérifier formellement l'équation $F = 0$.

Ainsi, *les développements asymptotiques des intégrales d'une équation différentielle seront à rechercher parmi ceux qui vérifient formellement cette équation.*

(¹) Une telle hypothèse se trouve réalisée dans la théorie des fonctions quasi-analytiques (*cf.* nᵒˢ 98 et 99).

Soit par exemple l'équation linéaire du premier ordre

$$x^2 \frac{dy}{dx} = ax + by.$$

Considérons une intégrale qui s'annule pour $x = 0$ et cherchons la suite de ses dérivées pour cette valeur (à supposer qu'elles existent). En dérivant, on obtient

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} = a + b \frac{dy}{dx},$$

en faisant $x = 0$, on obtient, pourvu que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit finie,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\frac{a}{b}.$$

En dérivant une fois de plus, on aurait

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = -\frac{2a}{b^2}.$$

Si enfin, nous dérivons n fois, nous obtiendrons

$$x^2 \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + 2nx \frac{d^ny}{dx^n} + n(n-1) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = b \frac{d^ny}{dx^n},$$

d'où l'on déduit

$$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 = \frac{n(n-1)}{b} \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0 = -\frac{n!(n-1)!\,a}{b^n}.$$

Nous sommes donc ainsi amenés au résultat suivant : le seul développement asymptotique, relatif à la valeur $x = 0$, vérifiant l'équation, est donné par

$$-\frac{y}{a} = \frac{x}{b} + \frac{x^2}{b^2} + 2!\,\frac{x^3}{b^3} + \ldots + (n-1)!\,\frac{x^n}{b^n} + \ldots.$$

Toutefois, le calcul ainsi effectué ne nous apprend pas s'il existe effectivement une fonction $f(x)$ qui admette ce développement asymptotique et qui soit en même temps une intégrale. Pour trancher cette question, remarquons qu'en posant

$$x = -\frac{b}{X}, \qquad y = aY,$$

l'équation proposée prend la forme

$$\frac{dY}{dX} = Y - \frac{1}{X}.$$

On vérifie aisément que l'intégrale générale peut alors s'écrire, *pour les valeurs positives de* X

$$Y = \int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{X+u} + Ce^X.$$

Lorsque X croît indéfiniment par valeurs positives, l'intégrale qui correspond à $C = 0$ admet bien, comme il est facile de le vérifier, le développement asymptotique

$$\frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{2!}{X^3} - \frac{3!}{X^4} + \ldots$$

et elle est la seule qui possède cette propriété. Mais, pour parvenir à un résultat simple, il a été nécessaire ici d'écarter les valeurs négatives de X : pour ces dernières, il est clair qu'il est impossible de distinguer les intégrales par leurs caractères asymptotiques, puisque la différence de deux d'entre elles est proportionnelle à e^X.

21. L'exemple précédent attire notre attention sur un fait important : nous avons dit que s'il existe des intégrales d'une équation différentielle, susceptibles d'être représentées par des séries asymptotiques, ces séries vérifieront formellement l'équation différentielle. Mais la réciproque n'a pas nécessairement lieu, et en fait, si un développement asymptotique et ses dérivées [1] donnent pour la fonction $F(x, y, y', \ldots y^{(n)})$ un développement asymptotique nul, il ne s'ensuit pas que cette fonction F soit identiquement nulle. Il faut chercher directement s'il y a des intégrales susceptibles d'une représentation asymptotique.

---

[1] Dans l'application aux équations différentielles, on a recours en réalité, non à la représentation asymptotique, dans sa conception la plus large, mais bien à la notion plus particulière de solution infiniment dérivable, à laquelle s'attache un développement de Taylor formel. C'est ce qui ressort d'ailleurs de l'exemple déjà traité.

H. Poincaré a montré l'existence de telles intégrales pour les équations linéaires dont les coefficients sont des polynomes d'un certain degré p : si ces polynomes sont pris au hasard, de manière qu'il n'y ait aucune relation particulière d'égalité entre leurs coefficients et si le coefficient de la dérivée d'ordre m le plus élevé figurant dans l'équation est effectivement de degré p, on trouve qu'il existe m développements divergents de la forme

$$e^{\alpha x} x^{\beta}\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\ldots\right)$$

fournissant chacun la représentation asymptotique d'une intégrale et d'une seule de l'équation (les α et les β pouvant être indifféremment réels ou imaginaires). Pour la démonstration, nous renverrons le lecteur au mémoire de H. Poincaré dans le Tome VIII des *Acta Mathematica* ou au Tome III du *Traité d'Analyse* de M. Picard, 2e édition, Chap. XIV, Sect. III.

Nous nous contenterons ici d'étudier, dans le champ réel, dans des conditions particulières qui seront précisées, l'équation linéaire du second ordre [1]

$$(1)\qquad y''+\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots\right)y'+\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\ldots\right)y=0$$

dont les coefficients, ordonnés suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, convergent au-dessus d'une certaine valeur de $|x|$. Le point $x=\infty$ est pour les intégrales de (1) le siège d'une singularité en général irrégulière, car en posant $x=\frac{1}{t}$, l'équation devient

$$(2)\qquad t^4\frac{d^2y}{dt^2}-t^2[a_0+(a_1-2)t+a_2t^2+\ldots]\frac{dy}{dt} + (b_0+b_1t+b_2t^2+\ldots)y=0.$$

Il s'agit d'étudier l'allure des intégrales de (1) pour x infini et positif.

Commençons par simplifier notre équation de manière à suppri-

---

(1) *Voir* une autre méthode de résolution du même problème, dans PICARD, *loc. cit*, Chap. XIV, Sect. IV. *Voir* aussi les travaux de Kneser (*Journal de Crelle*, t. 116) et de Horn (*Math. Annalen*, t. 49 et suiv.).

mer le terme en y', ce qu'on obtiendra en posant

$$y = ze^{-\int \frac{P}{2}\, dx},$$

P désignant en abrégé le coefficient de y' dans (1). D'après cela, nous pouvons nous borner à étudier l'équation

$$y'' + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right) y = 0. \tag{3}$$

Lorsque x croît indéfiniment, le coefficient de y tend vers a_0. Or les intégrales de l'équation

$$y'' + a_0 y = 0 \tag{4}$$

se comportent différemment, suivant que a_0 est positif ou négatif. Si a_0 est > 0, chaque ligne intégrale est une sinusoïde, c'est-à-dire une courbe qui se comporte d'une manière assez compliquée à l'infini et l'on conçoit que ces complications subsistent quand on prend l'équation complète [1].

Nous nous bornerons au cas où a_0 est < 0, cas où l'intégrale se comporte à l'infini comme une exponentielle : en posant

$$a_0 = - a^2 \,(a > 0)$$

l'équation (4) admettra les deux intégrales e^{ax} et e^{-ax}.

Proposons-nous de trouver dans quelles conditions il existe pour l'équation (3) deux intégrales de la forme

$$y_1 = e^{-ax}(1 + \varepsilon_1), \qquad y_2 = e^{+ax}(1 + \varepsilon_2),$$

ε_1 et ε_2 désignant deux fonctions qui tendent vers zéro lorsque x croît indéfiniment et que nous chercherons à définir par leurs développements asymptotiques. Nous allons montrer que l'annulation du terme en $\frac{1}{x}$ dans le coefficient de y

$$a_1 = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante cherchée.

Commençons par présenter quelques remarques préliminaires : s'il existe deux intégrales ayant la forme indiquée, l'intégrale

---

(1) Pour ce cas, *voir* PICARD, *loc. cit.*

générale

$$y = \mathrm{K}_1 y_1 + \mathrm{K}_2 y_2$$

possédera des propriétés différentes suivant que K_2 sera ou ne sera pas nul, car si K_2 est $\neq 0$, l'intégrale augmente indéfiniment avec x, alors que si K_2 est nul, elle tend vers zéro. Si K_2 n'est pas nul, on devra, pour avoir une représentation asymptotique, multiplier par e^{-ax}, ce qui donnera

$$e^{-ax} y = \mathrm{K}_1 e^{-2ax}(1 + \varepsilon_1) + \mathrm{K}_2(1 + \varepsilon_2);$$

la représentation asymptotique qu'on obtiendra ainsi sera naturellement impuissante à distinguer les intégrales correspondant aux différentes valeurs de K_1.

En revanche, si K_2 est nul, on aura

$$y = \mathrm{K}_1 y_1 \qquad \text{et} \qquad e^{ax} y = \mathrm{K}_1(1 + \varepsilon_1)$$

et l'on peut espérer trouver une représentation asymptotique *déterminant* y_1, car elle ne correspondra qu'à cette intégrale.

Ayant ainsi éclairé notre route, nous allons chercher s'il existe des représentations asymptotiques des intégrales de l'équation

$$(3\ bis) \qquad y'' + y\left(-a^2 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right) = 0.$$

Posons

$$y = e^{-ax}\left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots\right);$$

si ce développement représente une intégrale, nous savons qu'il doit vérifier formellement l'équation différentielle. Opérons l'identification.

En annulant d'abord le coefficient du terme en $\frac{1}{x}$, on trouve bien la condition nécessaire annoncée

$$a_1 = 0.$$

Nous allons supposer cette condition satisfaite et établir qu'elle est suffisante.

En annulant les coefficients de $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^{n+1}}$, on obtient les

relations

$$2ac_1 + a_2 = 0$$

$$4ac_2 + 2c_1 + a_2c_1 + a_3 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2nac_n + (n-1)nc_{n-1} + a_2c_{n-1} + a_3c_{n-2} + \ldots + a_{n+1} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui donnent successivement $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$

A l'aide des formules précédentes, on peut s'assurer que la série

$$1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots$$

est en général divergente. En particulier, si tous les a_k sont nuls, a_2 excepté, la formule générale donne

$$\left|\frac{c_n}{c_{n-1}}\right| = \frac{n(n-1) + a_2}{2an}.$$

Nous aurons cependant des développements asymptotiques. Il s'agit de montrer qu'ils correspondent à des intégrales. En premier lieu, nous allons établir qu'il existe une intégrale unique de l'équation

$$(5) \qquad y'' + \left(-a^2 + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \ldots\right)y = 0$$

telle que la fonction $e^{ax}y$ admette pour $x = +\infty$ le développement asymptotique

$$1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots$$

ci-dessus calculé. La démonstration comprendra plusieurs parties.

I. Montrons d'abord que si $\varphi(x)$ tend vers zéro (sans plus) quand x tend vers $+\infty$, il passe par chaque point du plan xOy une courbe intégrale unique de l'équation

$$y'' = y[a^2 + \varphi(x)]$$

qui soit asymptote à la demi-droite Ox.

En effet, à partir d'une valeur h suffisante de x, y'' sera du signe de y. Donc pour $x > h$, toute courbe intégrale tournera sa convexité vers Ox. Soient y_0 et y'_0 les valeurs prises par y et sa dérivée pour $x = x_0 > h$. Il importe de distinguer divers cas.

Si l'on a $y_0 > 0$, $y'_0 > 0$, y et y' iront en croissant pour $x > h$. Ils ne peuvent devenir infinis pour x fini, d'après les théorèmes généraux sur les équations linéaires. Donc y et y' vont sans cesse en croissant quand x tend vers $+\infty$, et y tend lui-même vers $+\infty$.

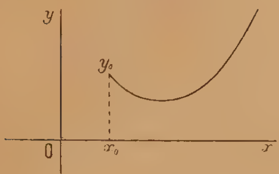

Fig. 1.

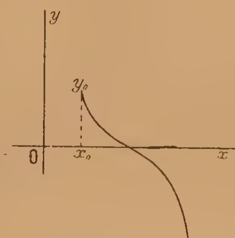

Fig. 2.

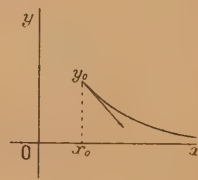

Fig. 3.

2° Supposons $y_0 > 0$ et $y'_0 < 0$. Il y a alors différentes dispositions possibles suivant que la courbe ne rencontre pas l'axe Ox (*fig* 1), qu'elle rencontre cet axe (cela ne pourra se produire qu'en un point) (*fig* 2) ou qu'elle lui soit asymptote (*fig*. 3).

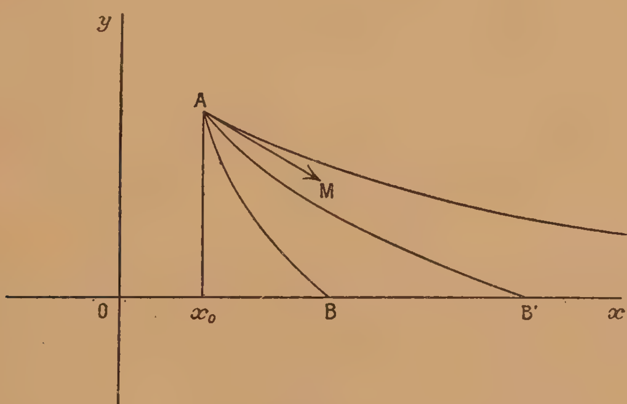

Fig. 4.

Dans aucun cas, une courbe intégrale ne peut être tangente à l'axe Ox (en un point à distance finie), car en un tel point y et y' s'annulant, il s'ensuivrait $y \equiv 0$. Les cas précédents (et ceux qui s'en déduisent par une symétrie par rapport à Ox) sont donc les seuls possibles. En définitive, le long d'une courbe intégrale,

y et y' seront toujours monotones à partir d'une certaine abscisse, et $|y|$ tendra ou bien vers ∞, ou bien vers zéro.

Considérons le faisceau des courbes intégrales issues d'un même point $A(x_0, y_0)$ (dont l'abscisse x_0 surpasse h). Il est impossible que deux de ces courbes se coupent à nouveau, c'est-à-dire pour une valeur de l'abscisse $> x_0$. Sinon, la différence de leurs ordonnées serait elle-même l'ordonnée d'une courbe intégrale, qui couperait l'axe des x en deux points, ce que nous avons reconnu impossible. De cette remarque, il résulte que par chaque point (x, y) du plan (d'abscisse $x > x_0$) il passe une et une seule des courbes intégrales issues du point $A(x_0, y_0)$. Notamment, par le point A et par un point B de Ox, d'abscisse suffisamment grande, passe une courbe intégrale : soit y'_0 le coefficient angulaire de la tangente en A à cette courbe : ce coefficient est un nombre négatif, qui croît avec l'abscisse du point B. Lorsque B s'éloigne indéfiniment sur Ox, ce coefficient angulaire y'_0 tend vers une limite (négative et non nulle), c'est-à-dire que la tangente en A a une certaine limite AM (*fig.* 4).

Je dis que l'intégrale qui correspond à cette tangente limite AM tend vers zéro quand x croît indéfiniment.

En effet, les deux seules autres hypothèses possibles, d'après ce que nous avons vu, sont celles qui correspondent aux figures 1 et 2,

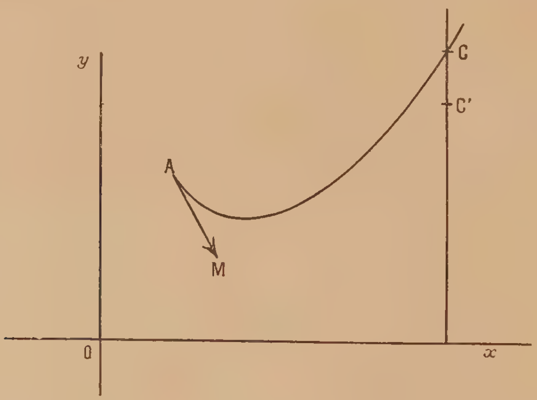

Fig. 5.

dans lesquelles l'intégrale croît indéfiniment sans rencontrer Ox ou rencontre cet axe à distance finie.

Dans le premier cas (*fig.* 5), si l'on considère une ordonnée

d'abscisse arbitrairement grande fournissant par son intersection avec la courbe étudiée un point C situé au-dessus du point A, comme cette courbe varie d'une manière continue avec la tangente en A, en donnant à cette tangente des positions voisines de AM, nous obtiendrons des points C′ voisins de C, et par suite, si l'on veut, situés au-dessus du point A. Ils correspondront donc à des intégrales augmentant indéfiniment. Or, AM est la limite des tangentes aux intégrales rencontrant Ox. Cette hypothèse est donc à rejeter.

Il en est de même de l'autre, car si l'intégrale tangente à AM rencontrait Ox à distance finie, il en serait de même des intégrales voisines, c'est-à-dire ayant des tangentes voisines de AM et situées au-dessus de AM; ce résultat est encore en contradiction avec la définition de AM.

Donc, l'intégrale considérée est asymptote à Ox. Cette intégrale y est unique. En effet, si une autre intégrale Y passant par A était asymptote à Ox, elle devrait être nécessairement au-dessous de la première en partant de A. On aurait alors, pour toute valeur de x,

$$Y - y > 0, \qquad Y' - y' > 0, \qquad Y'' - y'' > 0.$$

Donc, $Y - y$ augmenterait indéfiniment, et par suite, Y et y ne pourraient tendre simultanément vers zéro.

L'unicité d'une intégrale de l'équation (5) passant par A et asymptote à Ox est donc établie et entraîne le résultat suivant : toutes les courbes intégrales asymptotes à Ox sont définies par une équation de la forme $y = K\eta(x)$.

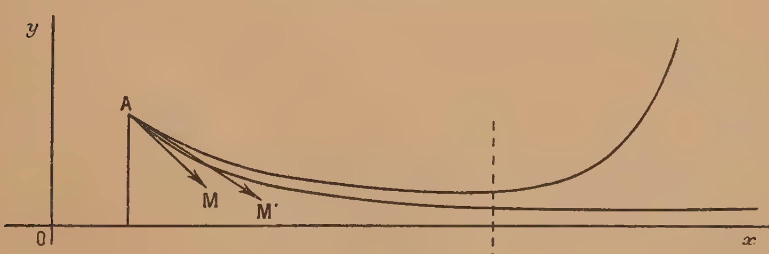

Fig. 6.

Avant de quitter ces considérations, signalons encore cette remarque : nous avons vu que si l'on coupe les courbes intégrales

issues d'un point A par une droite parallèle à Oy, le point d'intersection varie d'une manière continue et dans un sens constant quand on fait varier de même la tangente initiale. Mais si la droite s'éloigne à l'infini, il y a discontinuité. On trouve une intégrale unique tendant vers zéro, toutes les autres croissant indéfiniment ou décroissant de même. Une intégrale voisinant la première sur un parcours arbitrairement long finit par s'en éloigner indéfiniment (*fig.* 6). De tels effets sont bien connus dans les recherches relatives à la stabilité.

II. Montrons maintenant que, sans imposer à $\varphi(x)$ d'autre condition que celle de tendre vers zéro, en désignant (ce que nous ferons désormais), par $\eta(x)$ l'ordonnée d'une courbe intégrale asymptote, on a nécessairement [1]

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\eta'(x)}{\eta(x)} = -a.$$

En effet, nous avons

$$\eta''(x) = \eta(x)\left[a^2 + \varphi(x)\right];$$

multiplions les deux membres par $\eta'(x)$ et intégrons de x_0 à x_1, où x_1 désigne une valeur supérieure à x_0. Nous aurons

$$\eta_1'^2 - \eta_0'^2 = (\eta_1^2 - \eta_0^2)\left[a^2 + \varphi(\xi)\right],$$

ξ désignant un nombre compris entre x_0 et x_1. Dans cette relation, $\frac{x_1}{x_0}$ peut être pris suffisamment grand pour que η_1' et η_1 soient respectivement plus petits que $\varepsilon\eta_0'$ et $\varepsilon\eta_0$, si petit soit le nombre positif ε. Comme $\varphi(\xi)$ tend vers zéro lorsque x_0 croît indéfiniment, on en conclut aisément

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\eta'}{\eta} = -a.$$

III. Restreignons désormais la généralité et supposons que la fonction $\varphi(x)$ soit telle que son produit par x^2 possède une limite finie C (qui peut être nulle) pour $x = +\infty$. Dans ces conditions, nous allons montrer que le produit $e^{ax}\eta(x)$ tend vers une limite finie et non nulle.

---

(1) C'est là un cas particulier d'un résultat plus général de H. Poincaré.

En effet, nous avons par hypothèse,

$$\lim_{x=+\infty} x^2\left[\frac{\eta''(x)}{\eta(x)} - a^2\right] = C; \tag{6}$$

en posant

$$\frac{\eta'}{\eta} = u,$$

cette relation peut encore s'écrire

$$\lim_{x=+\infty} x^2(u' + u^2 - a^2) = C.$$

Nous venons de voir que u tend vers $-a$. Donc, on peut encore écrire

$$\lim_{x=+\infty} \left\{\frac{d}{dx}[x^2(u+a)] - x^2(u+a)\left(a - u + \frac{2}{x}\right)\right\} = C \tag{7}$$

ou

$$\lim_{x=+\infty} \left\{\frac{d}{dx}[x^2(u+a)] - 2x^2(u+a)\,\alpha(x)\right\} = C,$$

$\alpha(x)$ désignant une fonction qui tend vers a pour $x = +\infty$. Ainsi, si l'on introduit la fonction auxiliaire

$$v = x^2(u+a),$$

on aura, en vertu de l'hypothèse,

$$\lim_{x=+\infty} \left\{\frac{dv}{dx} - 2\alpha(x)v\right\} = C \tag{8}$$

avec

$$\lim_{x=+\infty} \alpha(x) = a.$$

Mais la relation (8) peut encore s'écrire

$$\frac{dv}{dx} - 2\alpha(x)v = \gamma(x), \tag{9}$$

$\gamma(x)$ désignant une fonction qui tend vers C pour x infini et positif. L'équation (9) est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à laquelle satisfait la fonction v. Nous allons établir dans un instant qu'il existe une intégrale et une seule de cette équation qui tend vers $-\dfrac{C}{2a}$ pour $x = +\infty$, les autres intégrales ayant une croissance intermédiaire entre celles de e^{2a_1x} et ^{2a_2x}, où a_1

et a_2 désignent deux valeurs positives constantes, soumises aux seules conditions $a_1 < a < a_2$. Puisque $u + a$ tend vers zéro, la fonction $v = x^2(u + a)$ dont la croissance est moins rapide que celle de x^2 ne peut s'identifier qu'avec l'intégrale de (9) qui tend vers $-\frac{C}{2a}\cdot$ On a donc

$$\lim_{x=\infty} x^2\left(\frac{\eta'}{\eta} + a\right) = -\frac{C}{2a},$$

d'où l'on conclut que l'intégrale de $\frac{\eta'}{\eta} + a$ est convergente, ou encore que $\log\eta + ax$ tend vers une limite bien déterminée, ou enfin, qu'il en est bien de même du produit $\eta(x)e^{ax}$. En choisissant le facteur indéterminé qui figure dans η, on peut s'arranger de manière que ce produit tende vers 1. Nous aurons alors

$$\eta(x) = e^{-ax}[1 + \varepsilon(x)],$$

$\varepsilon(x)$ tendant vers zéro.

IV. Montrons que l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dx} - \varpi(x)v = \lambda(x) \qquad [\text{où } \varpi(x) > 0], \tag{10}$$

dans laquelle $\varpi(x)$ et $\lambda(x)$ possèdent respectivement, pour $x = +\infty$, des limites p et l, admet une intégrale et une seule qui tend vers $-\frac{l}{p}$, toute autre intégrale ayant une croissance intermédiaire entre celles de $e^{p_1 x}$ et $e^{p_2 x}$ chaque fois que les constantes p_1 et p_2 comprennent entre elles la valeur limite p de $\varpi(x)$ (essentiellement positive).

Écrivons (10) sous la forme

$$\frac{dv}{dx} - \varpi(x)\left(v + \frac{l}{p}\right) = \lambda(x) - \frac{l}{p}\varpi(x); \tag{10'}$$

en prenant $V = v + \frac{l}{p}$ comme nouvelle fonction inconnue, nous serons ramenés à établir un théorème de même forme; on devra substituer à la fonction $\lambda(x)$ la fonction

$$\varepsilon(x) = \lambda(x) - \frac{l}{p}\varpi(x),$$

dont la limite est zéro.

Étudions donc l'équation

$$(11) \qquad \frac{dV}{dx} - \varpi(x)V = \varepsilon(x).$$

Elle a bien une intégrale tendant vers zéro, car si l'on pose

$$(12) \qquad V = -\frac{\int_x^\infty \varepsilon(t)e^{-P(t)}\,dt}{e^{-P(x)}},$$

où $P(x)$ est une primitive de $\varpi(x)$, le second membre de (12) est bien une intégrale (ce qu'on vérifie en dérivant logarithmiquement).

On a, d'ailleurs,

$$e^{-P(x)} = +\int_x^\infty e^{-P(t)}\varpi(t)\,dt.$$

Donc, (12) peut s'écrire :

$$V = -\frac{\int_x^\infty \varepsilon(t)e^{-P(t)}\,dt}{\int_x^\infty \varpi(t)e^{-P(t)}\,dt}.$$

Une application du théorème de la moyenne montre alors que V tend bien vers zéro. Il y a donc bien une intégrale particulière possédant la propriété annoncée.

C'est d'ailleurs la seule, car l'intégrale générale de l'équation sans second membre est

$$C e^{P(x)},$$

où la fonction $P(x)$ a une croissance intermédiaire entre $p_1 x$ et $p_2 x$, p_1 et p_2 étant deux constantes arbitrairement approchées (par défaut et par excès) de la valeur limite p. Le lemme énoncé est donc établi.

V. C'est par une suite indéfinie d'applications répétées de ce lemme que nous allons maintenant terminer la démonstration, en montrant que l'intégrale de l'équation (5), qui, à l'exclusion de toute autre, peut se mettre, pour x positif, infiniment grand, sous la forme

$$\eta(x) = e^{-ax}[1 + \varepsilon(x)],$$

est représentable par le développement asymptotique précédemment déterminé.

A cet effet, envisageons la fonction

$$s(x) = e^{ax}\eta(x) = 1 + \varepsilon(x)$$

dans sa dépendance vis-à-vis de la variable auxiliaire $x = \frac{1}{X}\cdot$ Elle vérifiera l'équation différentielle

$$(13) \qquad X^2 \frac{d^2 s}{dX^2} + 2(X + a)\frac{ds}{dX} + s(a_2 + a_3 X + a_4 X^2 + \ldots) = 0,$$

déduite de (5), en posant simultanément

$$y = e^{-ax}s, \qquad x = \frac{1}{X}\cdot$$

Elle sera d'ailleurs la seule solution de cette équation qui tende vers 1 quand X tend vers zéro par valeurs positives. Pour chaque valeur positive, suffisamment petite de X, elle possède, par rapport à cette variable, des dérivées de tous ordres; il s'agit de montrer que toutes ces dérivées tendent, lorsque X tend vers zéro, vers des limites bien déterminées. Il en est ainsi pour $\frac{ds}{dX} = \sigma_1(X)$, car, en vertu de (13), $\sigma_1(X)$ est une solution d'une équation différentielle linéaire

$$X^2 \frac{d\sigma_1}{dX} + 2(X + a)\sigma_1(X) + \bar{\gamma}(X) = 0,$$

où γ tend vers a_2, pour X infiniment petit. Revenons à la variable x. Cette équation est de la forme

$$\frac{d\sigma_1}{dx} - 2\alpha(x)\sigma_1 = \gamma(x);$$

donc, σ_1 tend vers lim $-\frac{\gamma}{2\alpha}$, ou possède une croissance exponentielle. Cette hypothèse est à rejeter, car elle entraînerait que s croît indéfiniment. Donc, la dérivée première de s par rapport à X, pour $X = 0$, tend bien vers une limite. On établira la même propriété pour la dérivée seconde, puis pour les dérivées d'ordre supérieur, en raisonnant de même sur les équations dérivées de (13) par rapport à X, et ainsi de suite de proche en proche. On voit ici le rôle essentiel du lemme établi au précédent paragraphe. En définitive, l'intégrale considérée admet donc bien un dévelop-

ment asymptotique, et comme il n'en est qu'un seul correspondant à une intégrale de la forme

$$e^{-ax}[1+\varepsilon_1(x)],$$

qui vérifie formellement l'équation donnée, celui-ci représente bien l'intégrale en question.

22. Pour achever l'étude des intégrales de l'équation (5) au point de vue de leurs développements asymptotiques, il nous reste à montrer qu'on en peut trouver qui sont susceptibles de s'écrire

$$e^{ax}[1+\varepsilon_2(x)]$$

et qui forment une famille à un paramètre, bien que la fonction $\varepsilon_2(x)$ ait, pour toutes ces intégrales, le même développement asymptotique (ce que nous avons précédemment expliqué). Au point de vue formel, ce développement est celui que nous avons déterminé plus haut en changement près de a en $-a$. Il reste à prouver que ses coefficients caractérisent des propriétés limites d'intégrales convenables de l'équation (5). Nous nous bornerons à donner le plan du raisonnement, qui se développe parallèlement à celui que nous venons d'exposer. Appelons $\zeta(x)$ une intégrale quelconque qui croît indéfiniment avec x. On a donc

$$\zeta''(x)=\zeta(x)[a^2+\varphi(x)].$$

Grâce au seul fait que $\varphi(x)$ tend vers zéro et au moyen de la relation

$$\zeta_1'^2-\zeta_0'^2=[\zeta_1^2-\zeta_0^2][a^2+\varphi(\xi)], \qquad (x_0<\xi<x_1),$$

où l'on peut, en prenant $\frac{x_1}{x_0}$ suffisamment grand, rendre $\frac{\zeta_0'}{\zeta_1'}$ et $\frac{\zeta_0}{\zeta_1}$ arbitrairement petits, on montre encore que l'on a

$$\lim_{x=\infty}\frac{\zeta'}{\zeta}=a;$$

en posant $\frac{\zeta'}{\zeta}=u$, on a encore

$$\lim_{x=+\infty} x^2(u'+u^2-a^2)=C.$$

On peut alors reprendre le raisonnement du III. Toutefois, à

l'équation (8) se substitue ici une équation

$$(8\ bis)\qquad \lim_{x=+\infty}\left[\frac{dv}{dx}+2\alpha(x)v\right]=\mathrm{C}\qquad \text{ou}\qquad v=x^2(u-a),$$

où $\alpha(x)$ tend vers $a>0$. Cette fois, cela entraîne toujours, sans restriction possible,

$$(9\ bis)\qquad \lim_{x=+\infty} v=\frac{\mathrm{C}}{2a},$$

et l'on voit que le produit $e^{-ax}\zeta(x)$ tend toujours vers une limite finie et non nulle. Comme on peut faire figurer dans $\zeta(x)$ un facteur indéterminé, on peut toujours le choisir de manière que la limite de $e^{-ax}\zeta(x)$ soit égale à 1. Insistons sur le fait qu'il existe une infinité d'intégrales $\zeta(x)$ à un paramètre, qui satisfont à cette condition. En appliquant la méthode de raisonnement de V, on montre alors aisément que toutes ces intégrales admettent le même développement asymptotique, lequel est nécessairement celui que donne le calcul formel. Notons qu'à l'application indéfinie du lemme IV, se substitue ici celle du lemme dont l'hypothèse se traduit par l'équation (8 *bis*) et dont la conclusion est (9 *bis*) dans tous les cas possibles; c'est ce que l'on reconnaît en remarquant que toutes les intégrales de l'équation linéaire

$$\frac{dv}{dx}+2\alpha(x)v=\gamma(x)$$

se comportent de la même manière à l'infini. L'impossibilité d'établir une distinction entre elles entraîne finalement une impossibilité de même nature pour le système des intégrales correspondant au développement asymptotique de la forme

$$e^{ax}\left[1+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\ldots\right],$$

23. Ces indications montrent suffisamment le genre de raisonnements qu'on rencontre dans les applications des développements asymptotiques aux équations différentielles. Elles éclairent la route pour l'étude de la sommation des séries divergentes. Considérons une série de Taylor formelle et supposons qu'elle vérifie une équation différentielle analytique en $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. Si cette série converge dans un rayon fini, il existe une intégrale de l'équation

qui en est la somme, à l'exclusion de toute autre fonction douée du même développement asymptotique. Si la série est à rayon de convergence nul, il peut exister une intégrale de l'équation qui lui soit asymptotique, ou même un système d'intégrales possédant cette propriété. Dans le cas où l'intégrale en question est unique, on peut évidemment la considérer comme *la somme* du développement étudié, relativement à l'équation différentielle donnée. Mais le véritable problème à résoudre consisterait à *chercher dans quelles conditions on peut affirmer que, si un développement à rayon de convergence nul satisfait formellement à plusieurs équations différentielles, ces équations admettent une intégrale commune, asymptotique à ce développement.*

Ce problème est difficile à traiter en toute généralité. La théorie de Stieltjes, que nous allons maintenant étudier, va nous en faire connaître une solution particulière très importante, relative aux équations différentielles algébriques; la théorie de M. Borel, qui englobe la précédente, nous ouvrira ensuite des voies nouvelles.

CHAPITRE II.

LES FRACTIONS CONTINUES ET LA THÉORIE DE STIELTJES.

La conversion des séries divergentes en fractions continues.

24. Laguerre paraît avoir le premier montré l'utilité qu'il peut y avoir à transformer une série divergente, ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{z}$, en une fraction continue convergente. Il a donné, en effet, un exemple particulièrement remarquable, dans lequel la valeur de la fraction continue convergente est précisément égale à la fonction qui a donné naissance à la série divergente.

Laguerre part de l'intégrale définie

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{z+u} = e^z \int_z^\infty \frac{e^{-u}\,du}{u}.$$

Si l'on cherche à développer formellement cette intégrale suivant les puissances de $\frac{1}{z}$, on est amené à écrire sous le signe somme une série convergente ou divergente

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{u}{z^2} + \frac{u^2}{z^3} - \frac{u^3}{z^4} + \ldots\right) e^{-u}\,du,$$

et l'intégration terme à terme donne la série [1]

$$J = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1.2}{z^3} - \frac{1.2.3}{z^4} + \frac{1.2.3.4}{z^5} - \ldots,$$

qui diverge pour toute valeur de z.

---

[1] Il serait d'ailleurs facile de montrer que cette intégration est légitime si l'on ne s'occupe que de la représentation asymptotique, conformément aux idées du Chapitre I.

Mais Laguerre observe que cette série divergente est formellement égale à la fraction continue suivante :

$$F = \cfrac{1}{z+1-\cfrac{1}{z+3-\cfrac{4}{z+5-\cfrac{9}{z+7-\cfrac{16}{z+9-\cfrac{25}{z+11-\ldots}}}}}},$$

fraction continue qui peut s'écrire aussi, d'après Stieltjes,

$$F = \cfrac{1}{z+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{z+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{z+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{z+\ldots}}}}}}}$$

Le résultat obtenu par Laguerre, c'est que l'on a

$$J = F,$$

c'est-à-dire que l'intégrale définie est égale à la série que l'on en a déduite par l'intermédiaire de la série divergente. Il est alors naturel d'attribuer à cette série la valeur commune de J et de F. On obtient ainsi, en faisant $z = 1$,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{1+u} = 1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + 1.2.3.4 - \ldots.$$

On trouve ainsi la somme de la série (2), considérée dans l'Introduction et dont s'est occupé Lacroix; on a

$$\begin{aligned} s = 1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + \ldots = 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{1+u} \\ = \int_0^\infty e^{-u}\,du - \int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{1+u} \\ = \int_0^\infty \frac{ue^{-u}\,du}{1+u}, \end{aligned}$$

ce qui donne $s = 0,4036526\ldots$, résultat conforme à celui de

Lacroix, obtenu par une méthode basée sur la théorie des différences [1].

Mais le résultat précédent de Laguerre resta d'abord isolé et ne parut pas prêter matière à une théorie générale. Il était réservé à Stieltjes, beaucoup plus tard, d'édifier une telle théorie.

25. Avant d'aller plus loin, présentons quelques remarques sur les fractions continues à termes numériques. Posons

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \ldots}}}}},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ désignant des constantes positives. On appelle *réduite d'ordre n* de F la fraction limitée

$$F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

L'expression F_n est une fonction de n lettres $a_1, \ldots, a_n$ et dépend homographiquement de chacune de ces variables; elle est décroissante par rapport aux variables de rang impair, croissante par rapport aux variables de rang pair. Les réduites de rang pair vont en croissant, car on a

$$F_{2n}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, a_{2n}) = F_{2n-2}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2} + \cfrac{1}{a_{2n-1} + \cfrac{1}{a_{2n}}}\right).$$

On montre de même que les réduites de rang impair vont en décroissant. En outre, chaque réduite de rang pair est inférieure à

---

(1) Lacroix, t. III, p. 346-348. On trouve dans le même Ouvrage (p. 391) une fraction continue déduite par Euler de l'intégrale définie que nous considérons, fraction qui diffère de celle de Laguerre et de celle de Stieltjes. Lacroix ajoute en note, p. 392 : « Il est facile de voir que l'on peut, par des procédés analogues au précédent, convertir en fraction continue toute série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs ». Mais ce point n'a pas été développé par Lacroix.

la réduite de rang impair qui la précède, d'où il résulte que toute réduite de rang pair est moindre qu'une réduite de rang impair.

Par suite, la représentation géométrique des réduites sur un axe donnera naissance à un système de segments emboîtés, les extrémités gauches étant les images des réduites de rang pair, les extrémités droites, celles des réduites de rang impair.

Fig. 7.

En ce qui concerne l'existence d'une limite pour les réduites successives, deux cas seulement pourront donc se présenter :

1° Les réduites paires tendront en croissant vers une limite λ, et les réduites impaires tendront en décroissant vers une limite Λ supérieure à la première. On peut toujours réaliser ce cas en remarquant qu'à toute suite de segments emboîtés dont les extrémités ont leurs abscisses positives, il correspond une fraction continue et une seule à termes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tous positifs dont les réduites sont justement les abscisses des extrémités des segments de la suite en question;

2° Les deux limites λ et Λ sont égales, et alors toutes les réduites convergent vers leur valeur commune.

Soit μ *un nombre entre zéro et un*. On peut, et d'une seule manière, trouver l'entier a_1 tel que l'on ait

$$\frac{1}{a_1+1} < \mu < \frac{1}{a_1};$$

a_1 est alors la partie entière de $\frac{1}{\mu}$. On peut donc poser

$$\mu = \frac{1}{a_1+\mu'},$$

μ' étant un nouveau nombre entre zéro et un. Appliquant le même raisonnement à μ', et ainsi de suite, on parvient au résultat suivant :

Si l'on impose aux nombres positifs a_n d'être entiers, il n'y a qu'une seule manière de les choisir de manière que les réduites de la fraction continue emboîtent le nombre μ.

On réserve aux fractions continues, dont les termes sont des entiers positifs, la dénomination de *fractions continues arithmétiques*. Ici, la convergence n'est jamais en cause puisqu'il y a correspondance biunivoque entre un nombre μ et le développement emboîtant. Toute fraction continue arithmétique est donc convergente et a pour valeur le nombre μ emboîté par ses réduites successives.

Un raisonnement récurrent montre immédiatement qu'en effectuant le calcul d'une réduite, de manière à la ramener au quotient de deux polynomes, le numérateur de l'une des fractions se déduit du dénominateur de la précédente en élevant tous les indices d'une unité. On a ainsi

$$F_1 = \frac{1}{[a_1]}, \quad F_2 = \frac{[a_2]}{[a_1 a_2]}, \quad F_3 = \frac{[a_2 a_3]}{[a_1 a_2 a_3]}, \quad \ldots, \quad F_n = \frac{[a_2 a_3 \ldots a_n]}{[a_1 a_2 a_3 \ldots a_n]},$$

où le symbole $[a_1 a_2 a_3 \ldots a_n]$ désigne génériquement un polynome à coefficients bien déterminés des lettres qu'il renferme [1], polynome qui est linéaire par rapport à chacune de ces lettres prise séparément. Lorsque a_n s'annule, $\frac{1}{a_n}$ tend vers $+\infty$ et $\frac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n}}$ vers zéro. Il s'ensuit que la limite de F_n est alors

$$F_{n-2}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}).$$

Lorsque a_n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{a_n}$ tend vers zéro et la limite de F_n est

$$F_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}).$$

Ceci fait prévoir les résultats suivants, faciles à vérifier, et dont le second est impliqué par le premier :

$$[a_1 a_2 a_3 \ldots a_n] = a_n[a_1 a_2 \ldots a_{n-1}] + [a_1 . a_2 \ldots a_{n-2}],$$
$$[\quad a_2 a_3 \ldots a_n] = a_n[\quad a_2 \ldots a_{n-1}] + [\quad a_2 \ldots a_{n-2}].$$

On pose d'ordinaire

$$F_n = \frac{P_n}{Q_n},$$

avec

$$P_n = [a_2 a_3 \ldots a_n], \qquad Q_n = [a_1 a_2 a_3 \ldots a_n].$$

---

(1) Cette notation est précisément celle que Stieljes a utilisée dans le Mémoire dont nous parlerons plus loin.

On a donc

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2},$$
$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}.$$

Formons

$$\begin{aligned} Q_{n-1} P_n - Q_n P_{n-1} &= [a_1 a_2 \ldots a_{n-1}][a_2 a_3 \ldots a_n] - [a_1 a_2 a_3 \ldots a_n][a_2 . a_3 \ldots a_{n-1}] \\ &= \quad [a_1 . a_2 \ldots a_{n-1}]\{[a_2 a_3 \ldots a_{n-1}] a_n + (a_2 a_3 \ldots a_{n-2})\} \\ &\quad - [a_2 . a_3 \ldots a_{n-1}]\{[a_1 a_2 \ldots a_{n-1}] a_n + [a_1 a_2 \ldots a_{n-2}]\} \\ &= \quad Q_{n-1} P_{n-2} - Q_{n-2} P_{n-1}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit aisément, par récurrence,

$$Q_{n-1} P_n - Q_n P_{n-1} = (-1)^{n-1},$$

d'où l'expression de la différence de deux réduites successives,

$$\text{(1)} \qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{[a_1 a_2 \ldots a_{n-1}][a_1 a_2 \ldots a_n]}.$$

On est ainsi conduit au résultat suivant : selon que l'expression

$$[a_1 a_2 \ldots a_n]$$

converge vers une limite finie, ou que l'un au moins des facteurs du dénominateur tend vers $+\infty$, lorsque n croît lui-même indéfiniment, la fraction continue possède elle-même deux valeurs limites distinctes ou une valeur limite unique. Or, on démontre simplement par récurrence les inégalités suivantes :

$$\text{(2)} \qquad [a_1 a_2 \ldots a_n] < (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n),$$
$$\text{(3)} \qquad [a_1 a_2 \ldots a_{2n+1}] > a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1},$$
$$\text{(4)} \qquad [a_1 a_2 \ldots a_{2n}] > a_1 [a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}].$$

Donc, si la série Σa_n converge, auquel cas le produit infini $\Pi(1 + a_n)$ converge, en vertu de (2), il en sera de même de l'expression $[a_1 a_2 \ldots a_n]$, et la fraction continue aura deux valeurs limites distinctes. Ou bien Σa_n diverge, et alors il en est de même de l'une au moins des séries formées par ses termes pairs ou impairs; en vertu des inégalités (3) et (4), nous en concluons que l'un au moins des premiers membres tend vers $+\infty$, mais alors, d'après ce qui précède, la fraction continue tend vers une limite bien déterminée. Nous sommes donc conduits au résultat fondamental suivant :

Pour qu'une fraction continue à termes a_n tous positifs soit convergente, il faut et il suffit que la série Σa_n soit divergente (1).

26. Ces indications générales nous suffiront pour le moment et seront complétées plus loin à propos du Mémoire de Stieltjes. Mais, avant de l'aborder, nous dirons encore quelques mots des travaux de M. Padé sur les fractions continues, afin de consacrer exclusivement la fin du chapitre aux travaux de Stieltjes et à leurs conséquences au point de vue de la théorie générale des séries divergentes.

Nous avons rappelé la possibilité de représenter, d'une manière unique, un nombre quelconque, compris entre zéro et 1 par une fraction continue arithmétique. De la relation (1), on déduit aisément que les réduites fournissent de ce nombre des expressions plus approchées que toute fraction de termes moindres (2).

M. Padé s'est occupé des fonctions continues algébriques, dont les termes $a_n(z)$ sont des polynomes en z, les réduites étant des fractions rationnelles et qui sont attachées à une série entière

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

par la condition que le développement en série d'une réduite quelconque $\frac{P(z)}{Q(z)}$, suivant les puissances croissantes de z, coïncide le plus longtemps possible, dans ses premiers termes, avec le développement de $f(z)$. Appelons p le degré de $P(z)$, q celui de $Q(z)$. La fraction rationnelle cherchée renferme $p + q + 2$ coefficients sous forme homogène, c'est-à-dire dépend de $p + q + 1$ paramètres indépendants; en identifiant les $p + q + 1$ premiers termes du développement en série de la fraction avec les termes correspondants du développement de $f(z)$, on aura $p + q + 1$ équations linéaires homogènes à $p + q + 2$ inconnues, équations qui admettent toujours des solutions.

Il y aura donc toujours une fraction rationnelle de degré (p, q) et approchée de $f(z)$ jusqu'aux termes de degré $p + q$ inclusi-

(1) *Voir* Stern, *Journal de Crelle*, t. 37.

(2) Voir les *Leçons sur la Théorie de la Croissance*, p. 127.

vement, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{P_p(z)}{Q_q(z)} - f(z) = z^{p+q-1}(A_0 A_1 z + \ldots).$$

Nous laisserons d'ailleurs de côté les cas anormaux où la fraction obtenue aurait des termes de degrés inférieurs à p et à q, ou donnerait une approximation plus grande que celle qu'on cherchait : ces deux cas, qui se ramènent l'un à l'autre, sont étudiés dans la Thèse de M. Padé [1]. Retenons surtout que les fractions approchées forment un tableau à double entrée, où les degrés p et q assignent respectivement la ligne et la colonne.

On voit que, la fraction continue ayant pour but de fournir des fractions rationnelles approchées, il peut être opportun de substituer son étude à celle de ses fractions. Dans son intéressante Thèse, M. Padé a étudié la question à un point de vue tout à fait général; il a fait observer que chaque développement en fraction continue fournit seulement une classe de fractions rationnelles approchées, pour lesquelles les degrés du numérateur et du dénominateur sont liés par une relation correspondant à un certain mode de cheminement dans le tableau des fractions rationnelles approchées. L'expression : *développer une fraction continue* n'a donc pas de sens précis puisque l'on obtiendra des développements différents suivant la manière dont on choisira parmi les fractions approchées, une infinité d'entre elles pour servir de réduites à la fraction continue. Ce choix est d'ailleurs soumis à des conditions que M. Padé a indiquées. Retenons seulement de ces recherches *la notion du tableau des fractions rationnelles approchées*, et le fait que ce tableau est complètement défini lorsqu'on donne une infinité des fractions qu'il contient, quelle que soit la manière dont ces fractions sont choisies, ou que la suite des coefficients de la série entière se trouve, de ce fait, entièrement fixée.

Ces préliminaires posés, voici comment on peut rattacher la considération du tableau à la théorie des séries divergentes [2].

---

[1] *Ann. Ec. Norm.*, 3e série, t. IX, 1892 (Suppl.),

[2] PADÉ, *Acta Mathematica*, t. VIII. Il serait facile d'étendre l'idée de M. Padé en considérant d'une manière générale une famille de fonctions analytiques $f_K(z)$, dont les développements tayloriens tendent pour K infini, vers le développement divergent étudié.

Supposons que l'on donne une série entière toujours divergente et formons le tableau correspondant; il pourra arriver qu'une suite infinie de fractions du tableau converge au moins dans un certain champ de la variable z et définisse dans ce champ une fonction qui sera analytique si la convergence est uniforme. On pourra faire correspondre cette fonction à la série.

Il est d'ailleurs clair que si l'on ajoute ou si l'on multiplie deux séries divergentes, les fractions rationnelles approchées de la série somme ou produit peuvent se déduire simplement des fractions rationnelles approchées des séries proposées, les opérations se faisant de la même manière, qu'il y ait ou non convergence.

Malgré leur caractère séduisant, les remarques qui précèdent ne suffisent pas à constituer une théorie satisfaisante. Deux questions essentielles devraient d'abord être résolues :

1° Étant donné un tableau déduit d'une série divergente, si l'on y choisit une infinité de fractions convergeant vers une limite, puis une autre infinité convergeant aussi vers une autre limite, peut-on affirmer que ces deux limites sont toujours égales, ou tout au moins préciser dans quel cas elles le sont?

2° La question précédente étant résolue, au moins pour une classe de séries divergentes, peut-on affirmer que la série somme (ou produit) de deux séries de cette classe donne naissance à un tableau dans lequel une infinité de fractions converge lorsqu'il en est ainsi pour les deux séries considérées? De plus, la fonction qu'on est amené à faire correspondre à la série somme (ou produit) est-elle la somme (ou le produit) des fonctions qui correspondent aux séries données?

Ces questions fondamentales une fois résolues, on pourra s'en poser d'analogues relatives au quotient de deux séries, à la dérivée ou à l'intégrale d'une série. Sinon, la théorie dont on vient d'esquisser les bases possibles reste à créer. On n'en doit pas moins à M. Padé d'avoir signalé, dans son Mémoire des *Acta*, un sujet de recherches des plus intéressants.

Mais le problème ainsi posé, dans toute sa généralité, paraît particulièrement difficile [1]. On est alors réduit à s'occuper de

---

[1] *Cf.* les remarques au début du Mémoire de E. Borel, *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta Mathematica*, t. XXIV).

cas particuliers; on gagne en profondeur ce qu'on perd en généralité, et l'on peut espérer, comme le montre à chaque instant l'histoire de la Science, arriver par cette voie à la connaissance du cas général. C'est ce qu'a fait Stieltjes pour les fractions continues, avec un succès qui est de nature à encourager des efforts analogues.

Le Mémoire de Stieltjes.

Stieltjes a exposé ses beaux résultats dans un Mémoire qu'il a présenté à l'Académie des Sciences où il a été l'objet d'un rapport de H. Poincaré [1], et qui a été imprimé peu de temps avant la mort prématurée de l'auteur, dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* [2].

Ce Mémoire, très soigneusement rédigé, est assez étendu, et les démonstrations, bien que présentées avec le maximum de simplicité, y sont souvent un peu longues à cause de la nature même du sujet. Nous devrons donc nous borner à en résumer les résultats fondamentaux, pour reprendre une exposition plus systématique, à partir du moment où ces résultats concerneront directement la théorie générale des séries divergentes.

Le point de départ des recherches de Stieltjes est la fraction continue

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \ldots + \cfrac{1}{a_{2n} + \cfrac{1}{a_{2n+1} z + \ldots}}}}}},$$

où les a_n sont des nombres réels et positifs et z une variable complexe.

Dans le cas où z est réel et positif, nous nous trouvons ramenés à une étude faite précédemment :

(1) *Comptes rendus*, t. CXIX, p. 630.

(2) Tomes VIII et IX (1894 et 1895). La partie la plus importante du Mémoire est dans le Tome VIII.

1° Si la série Σa_n est convergente, il en est de même de la série

$$(\sigma) \qquad a_1 z + a_2 + a_3 z + a_4 + a_5 z + \ldots;$$

donc, la limite des réduites de rang pair, d'une part, et celle des réduites de rang impair, d'autre part, sont distinctes;

2° Si la série Σa_n est divergente, il en est de même de la série (σ) et il y a une valeur limite unique de la fraction continue.

Stieltjes commence par étendre ces résultats aux valeurs complexes de z. Dans ce but, il remarque qu'en formant les réduites

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$$

de la fraction précédente, on obtient des dénominateurs $Q_n(z)$ n'ayant que des racines réelles non positives. On est alors amené à prouver la convergence d'une suite de fonctions holomorphes, dans un domaine obtenu en enlevant du plan de la variable z la partie négative de l'axe réel, sachant que cette suite converge sur la partie positive de cet axe. La suite en question comprendra la totalité des réduites si Σa_n diverge, celles d'une parité déterminée si Σa_n converge. Sans entrer dans les détails, nous voyons que le problème de convergence résolu par Stieltjes appartient à un ordre de questions aujourd'hui très étudiées et rendues classiques par d'excellents exposés didactiques [1] : nous voulons parler de la théorie des familles normales de fonctions analytiques, édifiée par M. Paul Montel.

28. Le seul cas dont nous aurons à nous occuper ici est celui où la série Σa_n est divergente. La fraction continue est alors convergente et définit une fonction holomorphe dans tout le plan de la variable complexe, exception faite des points de la partie négative de l'axe réel; cette demi-droite sera en général une coupure essentielle, bien que, dans des cas exceptionnels, cette coupure puisse disparaître en tout ou en partie.

La fraction continue peut être développée en série suivant les

---

(1) *Voir* notamment le livre de M. G. Julia (*Sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé*) et celui de M. G. Valiron (*Lectures on the general theory of integral Functions*).

puissances de $\frac{1}{z}$: on dirige le calcul en remarquant que les développements de même nature de la $n^{\text{ième}}$ et de la $(n+1)^{\text{ième}}$ réduite ont en commun leurs n premiers termes; ces termes subsistent donc dans les développements de toutes les réduites dont le rang dépasse n; ce seront les n premiers termes du développement en série de la fraction continue. On obtient ainsi ce développement sous la forme

$$F = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} \cdots$$

Les nombres c_0, c_1, c_2, ... sont positifs; Stieltjes donne le moyen d'obtenir leurs expressions en fonction des a_n, mais ces expressions sont compliquées. Au contraire, les a_n s'expriment au moyen des c_n sous une forme très élégante. Stieltjes pose

$$A_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad A_0 = 1;$$

$$B_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \qquad B_0 = 1,$$

et obtient les relations

$$a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}, \qquad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}}.$$

On voit que, les c_n étant donnés, pour que les a_n soient positifs, il est nécessaire que les A_n soient tous de même signe et que les B_n soient aussi tous de même signe. Puisque $A_0 = B_0 = 1$, *il faut que les* A_n *et les* B_n *soient tous positifs*.

Tel est le criterium auquel on reconnaîtra qu'à une série entière en $\frac{1}{z}$ correspond une fraction continue de la forme de Stieltjes, à coefficients positifs.

Il résulte de l'analyse de Stieltjes, bien qu'il ne formule pas ce résultat explicitement, que l'hypothèse

$$A_n > 0, \qquad B_n > 0,$$

quel que soit n, a pour conséquence que le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} & \cdots & c_{p+q} \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \cdots & c_{p+q+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p+q} & \cdots & \cdots & c_{p+2q} \end{vmatrix}$$

est positif, quels que soient p et q.

En particulier, le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} \end{vmatrix}$$

est positif, c'est-à-dire que l'on a (les c_p étant tous positifs)

$$\frac{c_{p+2}}{c_{p+1}} > \frac{c_{p+1}}{c_p}.$$

Le rapport $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ augmente donc constamment avec n; s'il tend vers une limite λ, la série proposée est convergente pour $|z| > \lambda$; s'il augmente indéfiniment, la série est divergente pour toutes valeurs de z. Or des exemples montrent que ce cas est compatible avec les conditions $A_n > 0$ et $B_n > 0$. Dès lors, *à la série divergente correspond une fraction continue susceptible de converger (il en sera bien ainsi lorsque la série Σa_n divergera) : moyennant quoi sa somme définira une fonction analytique que l'on peut faire correspondre à la série.*

Mais la proposition précédente n'aurait à elle seule que peu d'importance pratique, car une fraction continue est d'un maniement peu commode : par exemple, il est difficile de mettre sous forme de fraction continue la somme de deux fractions continues, ou même déjà celle d'une fraction continue et d'une simple constante (ou d'un polynome dans le cas des fractions continues algébriques).

29. Aussi, l'intérêt principal du Mémoire de Stieltjes réside-t-il dans l'introduction d'un élément analytique plus maniable, d'une intégrale définie, donnant naissance à la série divergente par son développement suivant les puissances de $\frac{1}{z}$; on peut d'autre part, la série étant donnée, former l'intégrale *en passant*

par l'intermédiaire de la fraction continue, qui sert simplement de lien entre la série et l'intégrale, dont nous allons maintenant étudier les rapports.

L'intégrale définie considérée par Stieltjes est de la forme [1]

$$J = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u},$$

dans laquelle $f(u)$ est une fonction supposée essentiellement positive. L'intégrale J définit manifestement une fonction holomorphe dans tout le plan, sauf sur la partie négative de l'axe réel, qui est une coupure. Il faut d'ailleurs distraire de cette coupure les segments de cet axe sur lesquels $f(u)$ serait identiquement nulle. Enfin, notons que la coupure est essentielle en tous les points où $f(u)$ n'est pas analytique; au contraire, si $f(u)$ est analytique sur un segment de la coupure, on peut prolonger analytiquement la fonction au delà de ce segment en déformant le chemin d'intégration, ce qui est légitime puisque $\frac{f(u)}{z+u}$ est analytique; la fonction définie par J est simplement non uniforme.

Mais dans tous les cas, en excluant l'hypothèse où $f(u)$ serait nulle pour les valeurs de u dépassant une certaine limite, le point $z = \infty$ est un point singulier pour la fonction définie par J;

---

(1) Stieltjes considère l'intégrale plus générale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u},$$

dans laquelle $\psi(u)$ est une fonction croissante, qui peut être discontinue : en un point de discontinuité a, où $\psi(u)$ subit un accroissement brusque égal à A, il s'introduit un terme $\frac{A}{z+a}$. Ces considérations sont nécessaires pour traiter la question en toute généralité. On doit alors se représenter une répartition de masses positives le long de la demi-droite Ou, de manière que $\psi(u)$ représente la masse totale située sur le segment fermé (o, u). Une telle répartition peut présenter différentes modalités : on peut avoir une répartition admettant une densité $f(u)$ partout *sommable* (au sens de Lebesgue), ou encore une répartition obtenue en plaçant des masses finies en des points isolés, ou enfin une répartition telle que toute la masse se trouve sur un ensemble de mesure nulle sans qu'aucun point soit le siège d'une masse finie; le cas général s'obtient en superposant les trois précédents. Nous nous bornons ici pour simplifier aux répartitions telles que $\psi(u)$ admette une dérivée $f(u)$ non seulement sommable, mais même continue.

cette fonction ne saurait donc admettre un développement convergent, suivant les puissances de $\frac{1}{z}$ ([1]).

Il est aisé de trouver son développement formel. On a

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{u}{z^2} + \frac{u^2}{z^3} - \frac{u^3}{z^4} + \ldots\right) f(u)\, du.$$

Si donc on pose

$$(1) \qquad c_n = \int_0^\infty f(u)\, u^n\, du \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

on obtient

$$(2) \qquad J = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} \ldots.$$

Nous supposons essentiellement la fonction $f(u)$ telle que toutes les intégrales (1) *aient un sens.* Dès lors, les constantes c_n sont manifestement positives, puisqu'on a supposé $f(u)$ positive.

La question qui se pose est donc la suivante : le développement (2) étant donné, peut-on à l'aide des relations (1) déterminer la fonction $f(u)$ *d'une manière unique?* Dans l'affirmative, il sera naturel de donner pour valeur à la série divergente l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{f(u)\, du}{z + u}.$$

L'existence de plusieurs fonctions $f(u)$, $f_1(u)$, ... satisfaisant aux relations (1) entraînerait l'existence de fonctions $\varphi(u)$ [telles que $f_1 - f$] satisfaisant aux relations

$$(3) \qquad 0 = \int_0^\infty \varphi(u)\, u^n\, du \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Or il existe bien de telles fonctions $\varphi(u)$: Stieltjes cite notamment

$$\varphi(u) = e^{-\sqrt[4]{u}} \sin \sqrt[4]{u}.$$

([1]) Le développement formel peut être convergent, par exemple avoir tous ses termes nuls, si l'on prend pour $f(u)$ la fonction non positive (dont il sera question un peu plus loin)

$$f(u) = e^{-\sqrt[4]{u}} \sin \sqrt[4]{u},$$

mais il n'a alors aucun rapport avec la fonction.

Pour résoudre la difficulté, il faut imposer à $f(u)$ des conditions supplémentaires de nature à déterminer le problème [1]. La condition imposée par Stieltjes est que la fonction $f(u)$ soit positive; il montre que cette condition détermine la solution d'une manière unique, si l'on sait en outre :

1° Que les déterminants A_n et B_n calculés au moyen des c_n suivant un mode déjà indiqué, sont positifs [2];

2° Que la série des a_n (qui se déduisent eux-mêmes de ces déterminants) est divergente.

Dans ce cas, en effet, la fraction continue déduite de la série est convergente et définit une fonction analytique $F(z)$ régulière dans tout le plan, sauf sur la partie négative de l'axe réel; l'égalité [3]

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u}$$

permet de déterminer la fonction $f(u)$ [4]. En effet, désignons par $-a$ une valeur réelle et négative de z et par ε un infiniment petit positif. On a

$$\begin{aligned} F(-a-i\varepsilon) - F(-a+i\varepsilon) &= \int_0^\infty f(u)\left[\frac{1}{u-a-i\varepsilon} - \frac{1}{u-a+i\varepsilon}\right]du \\ &= \int_0^\infty \frac{2i\varepsilon f(u)\,du}{(u-a)^2+\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

---

(1) La nécessité de conditions supplémentaires pour l'unicité de la solution est générale dans les *problèmes d'interpolation*, en étendant un peu le sens habituel de ce mot conformément aux idées du n° 19 *bis*. Voir la note de M. Émile Borel sur l'interpolation (*Comptes rendus*, 29 mars 1897) et son Mémoire sur les séries divergentes, p. 82.

(2) Il est facile de s'assurer, avec Stieltjes, que si $f(u)$ étant donnée et positive, on détermine les c_n par les formules (1), les déterminants A_n et B_n seront positifs.

(3) Il importe de remarquer que cette égalité n'est nullement évidente; elle implique que la série divergente doit avoir la même somme, qu'on la convertisse en fraction continue ou en intégrale définie; c'est là un des résultats les plus intéressants du Mémoire de Stieltjes.

(4) Nous simplifions ici le calcul de Stieltjes, grâce à notre hypothèse sur la continuité de $f(u)$ qui restreint d'ailleurs la généralité de la question; notre analyse ne s'applique pas au cas où les données seraient telles qu'elles devraient conduire à une fonction discontinue.

Cette dernière expression se présente, pour $\varepsilon = 0$, comme une *intégrale singulière*, c'est-à-dire ayant ses éléments nuls, sauf un seul (correspondant ici à $u = a$) qui fournit à lui seul la valeur de l'intégrale. Posons

$$I = \int_0^\infty \frac{2i\varepsilon f(u)\, du}{(u-a)^2 + \varepsilon^2}.$$

Pour chercher la limite de I quand ε tend vers zéro, introduisons provisoirement une constante positive h et écrivons

$$I = \int_0^{a-h} \frac{2i\varepsilon f(u)\, du}{(u-a)^2 + \varepsilon^2} + \int_{a-h}^{a+h} \frac{2i\varepsilon f(u)\, du}{(u-a)^2 + \varepsilon^2} + \int_{a+h}^{+\infty} \frac{2i\varepsilon f(u)\, du}{(u-a)^2 + \varepsilon^2}.$$

Lorsque ε tend vers zéro, h restant fixe, la première et la troisième intégrale tendent visiblement vers zéro et l'on a

$$\lim_{\varepsilon=0} I = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a-h}^{a+h} \frac{2i\varepsilon f(u)\, du}{(u-a)^2 + \varepsilon^2}.$$

Supposons maintenant que, dans l'intervalle $a-h$, $a+h$, la fonction $f(u)$ soit comprise entre les limites A et B; l'hypothèse

$$A < f(u) < B$$

entraînera

$$A \int_{a-h}^{a+h} \frac{\varepsilon\, du}{(u-a)^2 + \varepsilon^2} < \int_{a-h}^{a+h} \frac{\varepsilon f(u)\, du}{(u-a)^2 + \varepsilon^2} < B \int_{a-h}^{a+h} \frac{\varepsilon\, du}{(u-a)^2 + \varepsilon^2}.$$

Or l'intégrale

$$I' = \int_{a-h}^{a+h} \frac{\varepsilon\, du}{(u-a)^2 + \varepsilon^2}$$

est aisée à évaluer; en posant

$$u - a = \varepsilon t$$

elle devient

$$\int_{-\frac{h}{\varepsilon}}^{\frac{h}{\varepsilon}} \frac{dt}{1+t^2},$$

et lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives, h restant fixe, elle tend vers π. Donc la limite de l'intégrale I est comprise, entre $A\pi$ et $B\pi$, et comme h, bien que fixe, peut être pris arbitrairement petit, A et B peuvent être pris arbitrairement voisins de $f(a)$. On a donc

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathrm{I} = 2i\pi f(a),$$

c'est-à-dire

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon=0} [\mathrm{F}(-a-i\varepsilon) - \mathrm{F}(-a+i\varepsilon)]. \tag{4}$$

On voit ici la confirmation de ce que nous avions dit au sujet de la non-uniformité de $\mathrm{F}(z)$ en tout point où $f(u)$ n'est pas nul; on voit aussi que, si $f(z)$ n'est pas analytique, la fonction peut être prolongée au delà de la coupure, puisque la *mesure de sa non-uniformité* est $2i\pi f(z)$, fonction analytique, tandis qu'il n'en est certainement pas de même lorsque $f(u)$ n'est pas analytique.

Mais notre but était la détermination de $f(u)$ au moyen de $\mathrm{F}(z)$; il est réalisé par la formule (4); cette détermination est d'ailleurs unique et Stieltjes démontre que, dans le cas où nous nous trouvons, c'est-à-dire où les c_n sont tels que Σa_n diverge, il n'y a pas d'autre fonction positive $f(u)$ vérifiant les relations (1).

La théorie précédente fait donc correspondre, dans des cas étendus, à une série divergente, une fonction analytique déterminée. Il est d'ailleurs aisé de montrer que si la somme, la différence, le produit de deux séries divergentes sont tels que la *théorie de Stieltjes s'y applique*, la fonction analytique qu'elle fournit est la somme, la différence, le produit des fonctions analytiques qui correspondent aux séries dont on est parti. Mais s'il est immédiat que la théorie s'applique à la somme de deux séries lorsqu'elle s'applique à chacune d'elles, il n'en va pas nécessairement de même pour la différence ou pour le produit. C'est là une lacune de la théorie de Stieltjes qu'il est essentiel de combler pour rendre les applications possibles; ce sera précisément l'objet du prochain paragraphe.

En terminant celui-ci, exprimons le vœu que ce résumé trop rapide ait donné au lecteur le désir d'étudier le Mémoire de Stieltjes.

La généralisation de la théorie de Stieltjes (¹).

30. Nous avons vu que le problème de la détermination de la fonction $f(u)$, supposée positive par les relations

$$(1) \qquad c_n = \int_0^\infty f(u)\, u^n\, du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

ou *problème des moments*, est déterminé d'une manière unique lorsque les c_n sont tels que, les a_n étant positifs, la série Σa_n soit divergente. Pour abréger, nous dirons que, dans ce cas, *les c_n satisfont à la condition* S, *et que la fonction $f(u)$ correspondante satisfait aussi à la condition* S.

Étant donnée une fonction $f(u)$, il importe de savoir reconnaître si elle satisfait ou non à la condition S. « C'est là un problème, dit Stieltjes à la page 112 du Mémoire cité, qui présente quelques analogies avec celui qui consiste à décider de la convergence ou de la divergence d'une série donnée. On n'en peut guère donner une solution générale; tout ce qu'on peut faire, c'est donner quelques règles qui permettent de répondre à cette question dans un certain nombre de cas particuliers. »

Il serait en effet aisé de montrer que, de même que pour la convergence ou la divergence des séries, on ne peut espérer résoudre le problème au moyen d'une infinité dénombrable de règles; la difficulté ainsi mise en évidence paraît donc insoluble; mais il importe d'observer qu'elle est plus apparente que réelle, comme d'ailleurs la difficulté analogue pour les séries.

En effet, bien que Paul du Bois-Reymond ait fourni un exemple de série convergente dont la convergence ne peut être démontrée par aucun des critères de Bertrand, on peut dire qu'*en pratique* ces critères suffisent, c'est-à-dire permettent d'étudier toutes les séries que l'on rencontre effectivement. Dès lors, si l'on a démontré une proposition pour toutes les séries dont la convergence peut être prouvée par l'un de ces critères, c'est-à-dire pour toute série, telle qu'on ait, à partir d'un certain rang et pour une

---

(¹) Cette section est principalement consacrée aux compléments apportés par E. Borel à la théorie de Stieltjes dans son Mémoire, déjà cité, des *Annales de l'École Normale*, 1899.

certaine valeur de α,

$$|u_n| < \frac{1}{n \log n \log_2 n \ldots (\log_\alpha n)^{1+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0),$$

on pourra appliquer cette proposition à toutes les séries que l'on rencontrera (après s'être assuré qu'elles satisfont bien à la condition requise) de sorte que cette proposition, en apparence particulière, ne sera pas loin d'être tout à fait générale ([1]).

Il en est de même pour la condition S; dans l'impossibilité où nous sommes de l'expliciter complètement, nous la remplacerons par une condition plus restrictive, quoique sensiblement équivalente en pratique. Pour obtenir une telle condition, nous utiliserons une proposition de Stieltjes, que nous prierons encore le lecteur d'admettre. Cette proposition, tout à fait analogue à une proposition fondamentale de la théorie des séries, est la suivante :

Si la fonction $f(u)$ satisfait à la condition S, *il en est de même de toute fonction $f_1(u)$ telle que le rapport $\frac{f_1(u)}{f(u)}$ soit constamment inférieur à un nombre positif fixe.*

Il suffit alors de connaître une fonction particulière $f(u)$ satisfaisant à la condition S pour obtenir une règle analogue aux règles de convergence que l'on déduit pour les séries de la comparaison avec les séries connues.

Or, si l'on suppose

$$f(u) = \frac{4}{e^{2\pi\sqrt{u}} - e^{-2\pi\sqrt{u}}},$$

on obtient, comme le montre Stieltjes,

$$a_n = \frac{4}{n};$$

la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

([1]) La nécessité de supposer, pour une démonstration, une série plus convergente qu'une série connue (au lieu de la supposer simplement convergente), est fréquente en Analyse. C'est à cela que revient au fond la notion de convergence uniforme, dont l'importance est si grande.

est donc divergente et la fonction $f(u)$ satisfait à la condition S. Comme on peut évidemment changer u en mu, m étant une constante, on obtient la proposition suivante : s'il existe des constantes A et m telles qu'on ait, quel que soit m,

$$(S') \qquad f(u) < A\, e^{-m\sqrt{u}},$$

la fonction $f(u)$ satisfait à la condition S. On peut voir en outre que si l'on a

$$f(u) > A\, e^{-m u^{\lambda}},$$

avec $\lambda < \frac{1}{2}$, la fonction $f(u)$ ne satisfait pas à la condition S. Nous remplacerons donc désormais la condition S par la condition S′, en réalité plus restrictive, mais en pratique presque équivalente. Cette nouvelle condition S′ a l'avantage d'être plus explicite : on pourrait faire une théorie analogue à celle que nous allons exposer en remplaçant la condition S′ par toute autre condition S″ comprise dans la condition S.

Nous supposons donc que $f(u)$ satisfait à la condition S′; nous supposerons aussi que les dérivées successives de $f(u)$

$$f'(u), \quad f''(u), \quad \ldots$$

y satisfont aussi, au moins jusqu'à un ordre λ que nous fixerons ultérieurement. Moyennant quoi, nous allons pouvoir lever la restriction fondamentale de Stieltjes $f(u) > 0$.

Étant donnée une fonction $\varphi(u)$, non nécessairement positive, nous dirons que c'est une fonction de Stieltjes, si $|\varphi(u)|$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre λ satisfont à la condition S′. Nous allons prouver que si l'on pose

$$(2) \qquad c_n = \int_0^{\infty} \varphi(u)\, u^n\, du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

ces relations déterminent complètement $\varphi(u)$, les c_n étant donnés, *si on leur ajoute la condition que $\varphi(u)$ doit être une fonction de Stieltjes.*

En effet, s'il existe une autre fonction de Stieltjes $\psi(u)$ satisfaisant à ces relations, en posant $\theta(u) = \varphi(u) - \psi(u)$, nous aurons

$$(3) \qquad 0 = \int_0^{\infty} \theta(u)\, u^n\, du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

D'ailleurs $\theta(u)$, différence de deux fonctions de Stieltjes, est une telle fonction, c'est-à-dire qu'il existe des constantes A et m telles que

$$|\theta(u)| < A e^{-m\sqrt{u}}. \tag{4}$$

Mais il résulte des propositions de Stieltjes que la fonction positive

$$\varpi(u) = A e^{-m\sqrt{u}}$$

est telle que les relations

$$\gamma_n = \int_0^\infty \varpi(u)\, u^n\, du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

ne peuvent être vérifiées (pour les mêmes valeurs des γ_n) par aucune autre fonction positive $\varpi_1(u)$. Or, si l'on pose

$$\varpi_1(u) = \varpi(u) + \theta(u),$$

il résulte de l'inégalité (4) que la fonction $\varpi_1(u)$ est positive, et des relations (3) et (5) que l'on a

$$\gamma_n = \int_0^\infty \varpi_1(u)\, u^n\, du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Il y a donc contradiction, à moins que $\theta(u)$ ne soit identiquement nulle, c'est-à-dire que $\varphi(u) = \psi(u)$, ce qui démontre notre proposition d'unicité.

La série [divergente si $\varphi(u)$ n'est pas nul identiquement au-dessus d'une certaine valeur de u] que l'on déduit de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\, du}{z + u},$$

sera dite une *série de Stieltjes*, dans le cas où $\varphi(u)$ est une *fonction de Stieltjes*.

Malheureusement, le lien que la fraction continue établissait entre la série et l'intégrale, dans le cas où $\varphi(u) > 0$, n'existant plus, nous ne pouvons plus donner de méthode simple pour

reconnaître qu'une série divergente donnée est une série de Stieltjes et pour calculer la fonction $\varphi(u)$ correspondante ([1]).

On peut cependant donner une condition nécessaire pour qu'une série soit une série de Stieltjes; on a

$$c_n = \int_0^\infty \varphi(u) u^n \, du$$

et

$$\varphi(u) < A e^{-m\sqrt{u}}$$

on en conclut

$$|c_n| < \int_0^\infty A e^{-m\sqrt{u}} u^n \, du;$$

d'où, en calculant l'intégrale par le changement de variables,

$$u = \frac{t^2}{m^2},$$

et en désignant par B une constante

$$|c_n| < B(2n+1)!$$

Cette condition, qui limite la rapidité de croissance des c_n, est nécessaire pour que la série donnée soit une série de Stieltjes.

On peut faire aussi les remarques suivantes : supposons qu'une série soit une série de Stieltjes, nous pourrons la mettre sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{z+u},$$

$\varphi(u)$ satisfaisant à la condition S'. Posons

$$f(u) = \frac{\varphi(u) + |\varphi(u)|}{2}, \qquad f_1(u) = \frac{-\varphi(u) + |\varphi(u)|}{2},$$

nous obtenons ainsi deux fonctions non négatives, satisfaisant elles-mêmes à la condition S'. On pourra donc, en remarquant que l'on a

$$\varphi(u) = f(u) - f_1(u),$$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{z+u} = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u} - \int_0^\infty \frac{f_1(u)\,du}{z+u},$$

([1]) En terminant ce Chapitre, nous indiquerons cependant des cas où l'on peut aujourd'hui répondre affirmativement à ces questions.

mettre la série initiale sous forme de la différence de deux autres séries analogues, à chacune desquelles correspondra (puisque S′ entraîne S) une fraction continue de Stieltjes convergente.

Réciproquement, si la série initiale peut se mettre sous forme d'une telle différence, on pourra l'écrire

$$\int_0^\infty \frac{f(u)-f_1(u)}{z+u}\,du,$$

le numérateur $f(u)-f_1(u)$ se déduisant de la connaissance des deux fractions continues. Il sera alors possible de reconnaître si cette fonction et ses dérivées satisfont bien aux inégalités dont l'ensemble constitue la condition S′.

31. Mais nous avons hâte d'arriver aux propositions essentielles qui sont la base des applications de la théorie : ce sont les propositions relatives à la possibilité d'appliquer aux séries de Stieltjes les opérations fondamentales de l'Algèbre et de l'Analyse : addition, soustraction, multiplication ([1]), différentiation.

Relativement à l'addition et à la soustraction, nulle difficulté ; il est clair que la somme ou la différence de deux séries de Stieltjes en est une autre.

Occupons-nous maintenant de la *différentiation*, plus facile à traiter que la multiplication.

Soit

$$\text{(1)} \qquad F(z)=\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{z+u}$$

avec

$$c_n=\int_0^\infty \varphi(u)\,u^n\,du \qquad (n=0,1,2,3,\ldots),$$

de sorte qu'on a le développement divergent

$$F(z)=\frac{c_0}{z}-\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}-\frac{c_3}{z^4}+\ldots.$$

Je dis que la série

$$\text{(2)} \qquad F'(z)=-\frac{c_0}{z^2}+\frac{2c_1}{z^3}-\frac{3c_2}{z^4}+\frac{4c_3}{z^5}-\ldots.$$

([1]) On pourrait déduire, dans des conditions déterminées, une règle de division de la règle de multiplication, mais nous n'en aurons pas besoin et les conditions restrictives à introduire seraient d'ailleurs une gêne.

est aussi une série de Stieltjes, qui représente bien la dérivée de $F(z)$.

On a, en effet,

$$F'(z) = -\int_0^{\infty} \frac{\varphi(u)\,du}{(z+u)^2},$$

d'où, en intégrant par parties,

$$F'(z) = -\frac{\varphi(0)}{z} - \int_0^{\infty} \frac{\varphi'(u)\,du}{z+u}.$$

On voit que le développement de $F'(z)$ fournira une série de Stieltjes, puisqu'on suppose que $\varphi'(u)$ est une fonction de Stieltjes. Posons

$$F'(z) = \frac{\gamma_0}{z} - \frac{\gamma_1}{z^2} + \frac{\gamma_2}{z^3} - \frac{\gamma_3}{z^4} + \ldots \tag{3}$$

On a

$$\gamma_0 = -\varphi(0) - \int_0^{\infty} \varphi'(u)\,du = 0,$$

puis

$$\gamma_n = -\int_0^{\infty} u^n \varphi'(u)\,du \qquad (n > 0);$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\gamma_n = -[u^n \varphi(u)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} n u^{n-1} \varphi(u)\,du = n c_{n-1}.$$

Les développements (2) et (3) coïncident donc. C. Q. F. D.

Il nous reste à prouver que *le produit de deux séries de Stieltjes est une série de Stieltjes*. Dans ce but, désignons par $f(u)$ et $\varphi(u)$ deux fonctions de Stieltjes et posons

$$F(z) = \int_0^{\infty} \frac{f(u)\,du}{z+u},$$

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(u)\,du}{z+u}.$$

Soient d'ailleurs

$$c_n = \int_0^{\infty} f(u)\,u^n\,du, \qquad \gamma_n = \int_0^{\infty} \varphi(u)\,u^n\,du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

de sorte que les développements formels de $F(z)$ et $\Phi(z)$ sont

$$F(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \ldots.$$

$$\Phi(z) = \frac{\gamma_0}{z} - \frac{\gamma_1}{z^2} + \frac{\gamma_2}{z^3} - \frac{\gamma_3}{z^4} + \ldots.$$

Il s'agit de prouver que l'on a

$$F(z)\Phi(z) = \frac{c_0\gamma_0}{z^2} - \frac{c_0\gamma_1 + c_1\gamma_0}{z^3} + \frac{c_0\gamma_2 + c_1\gamma_1 + c_2\gamma_0}{z^4} - \ldots,$$

c'est-à-dire que le produit par z de la série du second membre est une série de Stieltjes, telle que l'intégrale correspondante soit égale à $zF(z)\Phi(z)$: en d'autres termes, on doit prouver qu'il existe une fonction $\theta(u)$ telle qu'on ait à la fois

$$zF(z)\Phi(z) = \int_0^\infty \frac{\theta(u)\,du}{z+u},$$

$$c_0\gamma_n + c_1\gamma_{n-1} + \ldots + c_n\gamma_0 = \int_0^\infty \theta(u)\,u^n\,du \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Les expressions de $F(z)$ et de $\Phi(z)$ donnent immédiatement

$$zF(z)\Phi(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{z\,f(u)\,\varphi(v)\,du\,dv}{(z+u)(z+v)}.$$

On a remplacé, dans l'expression de $\Phi(z)$, la variable d'intégration u par v, afin de pouvoir écrire sans confusion l'intégrale double. Nous allons maintenant transformer cette intégrale.

On a

$$\frac{z}{(z+u)(z+v)} = \frac{1}{v-u}\left(\frac{v}{z+v} - \frac{u}{z+u}\right),$$

de sorte que, si l'on désigne pour abréger, l'intégrale par J, on peut écrire

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{v-u}\left(\frac{v}{z+v} - \frac{u}{z+u}\right) f(u)\,\varphi(v)\,du\,dv.$$

L'intégrale J a un sens, malgré la présence du facteur $v-u$ en dénominateur, puisque ce facteur se retrouverait en numérateur dans la parenthèse. Mais il n'en serait plus de même si l'on

décomposait l'intégrale J en deux autres, en séparant les deux termes de la parenthèse. Chacune de ces intégrales serait dépourvue de sens.

Pour éviter cette difficulté, nous allons modifier l'expression de J; traçons deux axes rectangulaires Ou et Ov et figurons les droites

$$u - v = \pm \varepsilon,$$

ε désignant une constante positive.

Nous désignerons par D_ε le domaine obtenu en supprimant de la portion du plan où les coordonnées u, v sont toutes deux positives, la bande comprise entre ces deux droites. Ce domaine D_ε est représenté et couvert de hachures sur la figure 8.

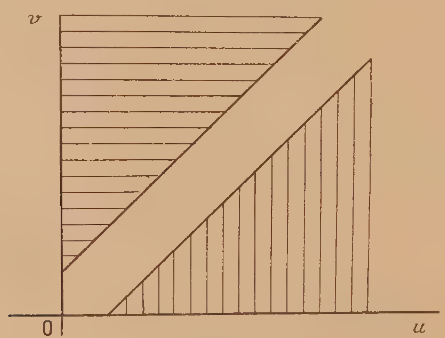

Fig. 8

Cela posé, on peut écrire

$$J = \lim_{\varepsilon=0} \int\int_{D_\varepsilon} \frac{f(u)\varphi(v)}{v-u} \left[\frac{v}{z+v} - \frac{u}{z+u} \right] du\, dv = J_1 + J_2$$

avec

$$J_1 = \lim_{\varepsilon=0} \int\int_{D_\varepsilon} \frac{v f(u)\varphi(v)}{(v-u)(z+v)} du\, dv,$$

$$J_2 = \lim_{\varepsilon=0} \int\int \frac{u f(u)\varphi(v)}{(u-v)(z+u)} du\, dv,$$

en supposant toutefois que les limites existent, ce que nous allons incessamment vérifier. Les intégrales doubles considérées ont, en effet, un sens, tant que ε n'est pas nul, puisque la droite $u = v$ est en dehors du champ d'intégration.

Occupons-nous d'abord de J_1. Posons

$$J_1(\varepsilon) = \int\int_{D_\varepsilon} \frac{v f(u) \varphi(v)}{(v-u)(z+v)} du\, dv.$$

On a évidemment

$$J_1(\varepsilon) = -\int_0^\infty \frac{v\varphi(v)}{z+v}\left(\int_0^{v-\varepsilon} + \int_{v+\varepsilon}^\infty \frac{f(u)\,du}{u-v}\right) dv.$$

Nous devons d'abord calculer la somme d'intégrales (¹)

$$\int_0^{v-\varepsilon} + \int_{v+\varepsilon}^\infty \frac{f(u)\,du}{u-v}.$$

Or, on a évidemment

$$\int \frac{f(u)\,du}{u-v} = f(u)\log|u-v| - \int f'(u)\log|u-v|\,du.$$

On en conclut que la somme d'intégrales cherchée est égale à

$$f(v-\varepsilon)\log\varepsilon - f(0)\log v - f(v+\varepsilon)\log\varepsilon$$
$$-\int_0^{v-\varepsilon} f'(u)\log(v-u)\,du - \int_{v+\varepsilon}^{+\infty} f'(u)\log(u-v)\,du,$$

car $f(\infty)$ est nul. Or, le produit

$$[f(v-\varepsilon) - f(v+\varepsilon)]\log\varepsilon$$

tend visiblement vers zéro avec ε, puisque la fonction $f(u)$ admet une dérivée. On a donc finalement

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_0^{v-\varepsilon} + \int_{v+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(u)\,du}{u-v} = -f(0)\log v - \int_0^\infty f'(u)\log|u-v|\,du.$$

En posant

$$f(0)\log v + \int_0^\infty f'(u)\log|u-v|\,du = \mu(v),$$

on obtient ainsi la formule

$$\lim_{\varepsilon=0} J_1(\varepsilon) = J_1 = \int_0^\infty \frac{v\varphi(v)\mu(v)\,dv}{z+v}.$$

(¹) On peut remarquer que cette somme est précisément ce que Cauchy appelait la valeur principale de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{u-v}.$$

De même, en posant

$$\varphi(o)\log u + \int_0^\infty \varphi'(v)\log|u-v|\,du = m(u),$$

on aura

$$J_2 = \int_0^\infty \frac{u f(u)\, m(u)\, du}{z+u}.$$

On a donc finalement

$$J = J_1 + J_2 = \int_0^\infty u \frac{f(u)\, m(u) + \varphi(u)\, \mu(u)}{z+u}\, du.$$

Il est aisé de voir que la fonction

$$\theta(u) = u[f(u)\, m(u) + \varphi(u)\, \mu(u)]$$

est une fonction de Stieltjes en même temps que $f(u)$ et $\varphi(u)$; il suffira pour cela de remarquer que l'on a aisément des limites supérieures des intégrales qui figurent dans les expressions de $m(u)$ et de $\mu(u)$; quant aux facteurs $\log u$, ils sont pour $u = o$, détruits par le facteur u qui figure en dehors des crochets; on voit dès lors immédiatement que si l'on a

$$|f(u)| < A e^{-m\sqrt{u}}, \qquad |\varphi(u)| < A e^{-m\sqrt{u}},$$

on a aussi, pour u assez grand,

$$|\theta(u)| < e^{-m'\sqrt{u}},$$

pourvu que m' soit inférieur à m; et comme $\theta(u)$ est toujours fini, il existe un nombre A' tel que l'on ait, quel que soit u,

$$|\theta(u)| < A' e^{-m'\sqrt{u}}.$$

La première partie de notre proposition est donc démontrée : il est prouvé que le produit $z\,F(z)\,\Phi(z)$ est une série de Stieltjes; il s'agit maintenant de faire voir que cette série s'obtient en multipliant les séries $z\,F(z)$ et $\Phi(z)$. On pourrait le vérifier en calculant directement les intégrales

$$\int_0^\infty \theta(u)\, u^n\, du,$$

calcul un peu long, mais sans difficulté. Il vaut mieux remarquer

que cette vérification est inutile, car, comme nous avons déjà eu l'occasion de le rappeler, les règles du calcul sont indépendantes de la valeur numérique des lettres sur lesquelles on opère; or dans le cas où les séries $F(z)$ et $\Phi(z)$ sont convergentes, c'est-à-dire $f(u)$ et $\varphi(u)$ sont nulles pour u assez grand, il est clair que la vérification doit s'effectuer; l'hypothèse que $f(u)$ et $\varphi(u)$ sont nulles pour u assez grand n'y interviendra d'ailleurs pas, puisque les intégrales sont prises jusqu'à l'infini et que, dans tous les cas, non seulement $f(u)$ et $\varphi(u)$, mais les produits $u^n f(u)$ et $u^n \varphi(u)$ s'annulent à l'infini.

Le calcul de vérification est donc inutile et notre proposition se trouve complètement démontrée.

32. On peut résumer les diverses propositions précédentes en un seul énoncé :

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des séries de Stieltjes et

$$\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_n; y'_1, \ldots, y'_n, \ldots, y_n^{(\lambda)})$$

un polynome par rapport à ces fonctions et à leurs dérivées; ce polynome est une série de Stieltjes que l'on obtient en calculant sur les séries comme si elles étaient convergentes (pourvu que l'ordre de dérivation, laissé indéterminé dans l'énoncé de la condition S', soit au moins égal à l'ordre de dérivation le plus élevé λ, qui figure dans Ψ).

Il est manifeste qu'une série de Stieltjes ne peut représenter zéro que si tous ses coefficients sont nuls; en effet la fonction

$$F(z) = \int_0^{\infty} \frac{f(u)\,du}{z+u}$$

ne peut être identiquement nulle que si $f(u)$ est identiquement nulle, et dès lors, tous les c_n sont nuls; d'autre part, la seule fonction de Stieltjes qui corresponde à des c_n tous nuls est évidemment une fonction identiquement nulle.

On peut donc ajouter à l'énoncé précédent que *l'on aura*

$$\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_n^{(\lambda)}) = 0,$$

dans le cas et dans le cas seulement où la série de Stieltjes obtenue pour Ψ *est identiquement nulle.*

Enfin tout ce qui précède s'étend sans difficulté au cas où les coefficients du polynome Ψ, au lieu d'être constants, sont des polynomes en z, car en divisant par une puissance convenable de z, on aura pour coefficients des polynomes en $\frac{1}{z}$, lesquels peuvent être considérés comme des cas particuliers de séries de Stieltjes.

On peut dès lors énoncer, en particulier, l'important théorème suivant :

Soient

$$f(z, y, y', y'', \ldots, y^{(\lambda)}) = 0$$

une équation différentielle algébrique et

$$y = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \ldots$$

une série divergente qui la vérifie formellement; si cette série est une série de Stieltjes, elle définit une intégrale de l'équation différentielle. Car, celle-ci étant vérifiée formellement par la série y, la fonction de Stieltjes obtenue par cette substitution a tous ses coefficients nuls et est par suite identiquement nulle; ainsi la substitution de y annule le premier membre; donc y est bien une intégrale.

Pour donner un exemple, considérons la série déjà citée (n° 20)

$$y = \int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{z+u} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2!}{z^3} - \frac{3!}{z^4} + \ldots,$$

qui est visiblement une série de Stieltjes. Il nous suffit de la dériver pour constater qu'elle vérifie l'équation différentielle (elle-même signalée, *ibid.*)

$$\frac{dy}{dz} = y - \frac{1}{z}.$$

Les fonctions de Stieltjes nous fournissent ainsi un premier exemple d'utilisation des séries divergentes pour l'intégration effective des équations différentielles, c'est-à-dire pour la détermination précise de leurs intégrales au moyen d'un développement divergent.

Malheureusement, le champ des applications de la théorie précédente ne peut être qu'assez restreint, puisque les séries de Stieltjes ne sont aptes qu'à représenter des fonctions analytiques admettant comme unique singularité un segment rectiligne [1], c'est-à-dire une classe de fonctions en somme très particulières. C'est seulement aux équations différentielles admettant une solution de cette nature que la théorie pourra s'appliquer. La théorie de M. Borel, que nous développerons au Chapitre III, et qui englobe celle de Stieltjes, offrira justement l'avantage d'une généralité beaucoup plus grande.

32 *bis*. Terminons cet exposé en signalant divers travaux relatifs au *problème des moments*. Dans un Mémoire publié en 1900 dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, M. Le Roy en a donné, dans des cas étendus, une solution explicite : notamment, elle s'applique aux suites c_n définies par une relation du type suivant

$$c_n = n!\, G(n),$$

$G(t)$ désignant une fonction entière ayant son module maximum moins rapidement croissant qu'une expression de la forme $e^{|t|^\alpha}$, α désignant un nombre positif fixe inférieur à l'unité [2]; dans ces conditions, il montre que la fonction $\varphi(x)$, qui prend place dans les formules

$$c_n = \int_0^\infty x^n \varphi(x)\, dx,$$

est comparable, pour les grandes valeurs positives de x, à une exponentielle e^{-hx}, où h désigne une constante positive. C'est donc une fonction de Stieltjes, au sens précédent. Pour les autres formes des c_n permettant la résolution, nous renverrons au Mémoire de l'Auteur, qui nous occupera ultérieurement à d'autres titres.

Plus récemment, le problème des moments a fait l'objet de recherches de MM. Hamburger (*Math. Annalen*, t. 81 et 82),

---

(1) Un changement simple de variable permet de supposer ce segment quelconque; on pourrait aussi le remplacer sans difficulté par un arc de cercle.

(2) On peut supprimer cette périphrase et dire que $G(t)$ est une fonction entière *d'ordre apparent inférieur à l'unité*.

Rolf Nevannlina (*Ann. Ac. scient. Fennicæ*, série A, t. XVIII, n° 5), M. Riesz (*Archiv. för Mat.*, 1921, 1922, 1923), et T. Carleman. Dans son livre récent *sur les fonctions quasi analytiques* (1), M. Carleman démontre le résultat suivant :

Le problème des moments de Stieltjes

$$\int_0^\infty x^n \, d\Psi(x) = c_n$$

est bien déterminé si la série $\sum \frac{1}{\sqrt[2n]{c_n}}$ *diverge.*

(1) Gauthier-Villars, Paris, 1926 (*Collection E. Borel*).

CHAPITRE III.

LA THÉORIE DES SÉRIES SOMMABLES.

Quelques remarques préliminaires.

33. Soit S_n la somme des n premiers termes d'une série numérique

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots.$$

Les S_n forment un ensemble σ; soit σ' son dérivé [1]. Suivant que σ' comprend un point unique, ou plus d'un point, la série sera dite *bien déterminée* ou *oscillante*. En cas de détermination, il y aura *convergence* ou *divergence* suivant que la limite des S_n est finie ou infinie; si la série est oscillante, elle pourra être, avec σ', bornée ou non bornée. Soit une série bornée, appelons s et S les bornes inférieure et supérieure de σ', on dit aussi que ces nombres sont les *sommes inférieure et supérieure* de la série. Dans le cas d'une série oscillante quelconque, on peut extraire de la suite des S_n une suite partielle tendant vers n'importe quelle valeur de σ' : mais cette remarque a peu d'importance, la somme généralisée qu'on attribue à une série pouvant ne pas appartenir à σ'. Tel est le cas pour la série d'Euler

$$1-1+1-1+\ldots.$$

L'ensemble σ' se compose alors exclusivement des valeurs 0 et 1. La somme généralisée, définie par la méthode de la moyenne

(1) Si tous les S_n sont égaux, tous les points de σ coïncident; le dérivé σ' comprendra alors un point unique, celui avec lequel coïncident tous les points de σ. Notre définition suppose donc implicitement que l'on considère comme distincts deux points de σ provenant de valeurs différentes de l'indice n (même s'ils coïncident).

arithmétique, c'est-à-dire par

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n},$$

a pour valeur $\frac{1}{2}$.

Ainsi que nous l'avons dit en commençant, les procédés de sommation sont des plus variés. On suppose essentiellement que chacun de ces procédés satisfait à la *condition de permanence*, c'est-à-dire fait correspondre à chaque série *bien déterminée* une somme égale à la valeur unique dont se compose alors σ'. Mais on ne saurait se contenter de comparer chaque méthode de sommation avec la méthode initiale qui consiste à calculer, lorsqu'elle existe, la limite des S_n. Il faut encore comparer les méthodes de sommation entre elles, pour savoir si elles donnent des résultats concordants et si elles jouissent d'une efficacité plus ou moins grande. Avant d'étudier de telles questions, nous passerons en revue quelques procédés particuliers et montrerons leur intérêt par des applications simples.

Incursion dans la théorie des séries trigonométriques.

34. Un examen portant sur quelques points de la théorie des séries de Fourier nous guidera utilement pour la suite; nous allons montrer le parti qu'on y peut tirer de deux idées bien distinctes, qu'on rencontre justement à la base des méthodes usuelles de sommation.

Soit $f(x)$ une fonction intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Considérons la série

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots \tag{1}$$

dont les coefficients a_n et b_n se calculent par les formules

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

L'hypothèse de la continuité de $f(x)$ ne suffirait pas à entraîner la convergence de (1).

Nous allons démontrer, avec M. L. Féjer [1], qu'*en chaque point x_0 où $f(x)$ possède une valeur limite à droite et une valeur limite à gauche, le procédé déjà mentionné de la moyenne arithmétique assigne à la série* (1) *une somme égale à la demi-somme de ces deux valeurs limites.* Notamment, si $f(x)$ est continue, la somme au sens indiqué de la série (1) sera égale à $f(x)$.

Pour l'établir, partons de l'expression bien connue de

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_m \cos m x_0 + b_m \sin m x_0),$$

à savoir

$$S_n(x_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)}{2} \, \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \, dt,$$

laquelle résulte aisément de la sommation de cosinus d'arcs en progression arithmétique et d'un changement de variables. Appliquant cette formule pour les valeurs 0, 1, 2, ..., $n-1$ de l'indice n et ajoutant, on trouve facilement le résultat suivant

$$(2) \qquad \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n} = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)}{2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt,$$

en faisant dans les deux membres $f(t) = 1$, il vient en particulier

$$(3) \qquad 1 = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Or des relations (2) et (3) nous déduisons

$$(4) \qquad \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n} - \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$$
$$= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)}{2} - \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}\right] \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Remarquons maintenant qu'en appelant h un nombre positif fixe,

---

[1] *Math. Annalen*, t. 58, p. 51. Le résultat s'applique indifféremment, que $f(x)$ soit intégrable au sens de Riemann ou au sens de Lebesgue, dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

moindre que $\frac{\pi}{2}$, l'intégrale

$$J_n = \frac{2}{n\pi} \int_h^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt$$

peut être rendue arbitrairement petite en prenant n suffisamment grand. En effet, cette intégrale est moindre que

$$\frac{2}{n\pi \sin^2 h} \int_h^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 nt\, dt < \frac{1}{2n \sin^2 h}.$$

Cela posé, appelons 2ε un nombre positif arbitraire, commençons par déterminer h de manière que dans l'intervalle $0 \leq t \leq h$, le crochet sous le signe d'intégration, au second membre de (4), soit moindre en valeur absolue que ε [1]. Alors, en vertu de (3) et du théorème de la moyenne, la portion de l'intégrale provenant de l'intervalle $(0, h)$ sera moindre en valeur absolue que ε, quelle que soit d'ailleurs la valeur de n; h étant ainsi fixé, choisissons maintenant n de manière à avoir

$$J_n < \frac{1}{2n \sin^2 h} < \varepsilon.$$

Le premier membre de (4) deviendra ainsi, en valeur absolue, moindre que 2ε. C. Q. F. D.

On peut faire encore la remarque suivante : si en un point x_0, la fonction $f(x)$ est continue et si la série (1) converge en ce point, sa somme est nécessairement $f(x_0)$; c'est une conséquence du fait que le mode de sommation étudié satisfait à la condition de permanence.

Grâce à ce mode de sommation, nous possédons, par le théorème de Féjer, un énoncé général relatif à la représentation d'une fonction continue quelconque au moyen d'une série trigonométrique.

34 *bis*. Nous allons maintenant montrer qu'un énoncé analogue peut s'obtenir dans une voie différente de celle qui précède. Au

---

(1) Cela est possible, en vertu des hypothèses sur les propriétés limites de $f(x)$, au point x_0.

lieu de prendre ici des moyennes de sommes successives, nous substituerons à la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

une série de la forme

$$u_0 + r u_1 + r^2 u_2 \ldots + r^n u_n + \ldots, \tag{2}$$

qui sera convergente, avec une somme $s(r)$ pour $r < 1$. Nous montrerons que $s(r)$ tend vers une limite s bien déterminée lorsque r tend en croissant vers 1, dans le cas où l'on a

$$u_n = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta,$$

a_n et b_n étant les coefficients de Fourier attachés à la fonction continue $f(\theta)$; et en outre que cette valeur limite s est précisément égale à $f(\theta)$.

Au point de vue formel, le procédé ainsi décrit consiste dans l'introduction des facteurs r^n qui font passer de la série (1) à une série convergente, et qu'on appelle pour cette raison des *facteurs de convergence*.

Considérons θ comme l'abscisse angulaire d'un point M sur un cercle de rayon unité, et supposons la fonction $f(\theta)$ continue et uniforme sur ce cercle (elle sera donc périodique, de période 2π). En un point P du rayon OM tel que $\overline{\text{OP}} = r$, la valeur de la fonction harmonique dans le cercle, continue sur sa circonférence et s'y réduisant à $f(\theta)$, est fournie par l'intégrale de Poisson [1]

$$\mathrm{F}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - \theta) + r^2} \, d\alpha. \tag{3}$$

Or, on peut écrire, en développant la fraction sous le signe d'intégration par rapport aux puissances de r

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - \theta) + r^2} = 1 + 2r\cos(\alpha - \theta) + 2r^2 \cos 2(\alpha - \theta) + \ldots \\ + 2r^n \cos n(\alpha - \theta) + \ldots, \tag{4}$$

développement qui converge uniformément lorsqu'on fait varier α

(1) *Voir* par exemple le Tome II du *Traité d'Analyse* de M. Picard, Chap. I,

entre o et 2π, car il est majoré par le développement convergent

$$1+2r+2r^2+\ldots+2r^n+\ldots$$

indépendant de α.

On peut donc, après avoir multiplié les deux membres de (4) par $f(\alpha)$, intégrer terme à terme, ce qui donnera, en vertu de la définition des a_n et b_n,

$$F(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+r(a_1\cos\theta+b_1\sin\theta)+\ldots+r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)+\ldots.$$

Ainsi que nous l'avons rappelé, on démontre que $F(r,\theta)$ défini par la relation (3) tend vers $f(\theta)$ lorsque r tend en croissant vers l'unité. On a donc bien

$$f(\theta)=\lim_{r\to 1}\left[\frac{a_0}{2}+r(a_1\cos\theta+b_1\sin\theta)+\ldots+r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)+\ldots\right].$$

En résumé, l'étude de la représentation par développements trigonométriques des fonctions continues attire notre attention sur deux principes de sommation :

1° Le principe des moyennes;
2° Le principe des facteurs de convergence.

Dans un exposé didactique, il suffit pratiquement de se rattacher à l'un de ces principes.

Nous choisirons le premier [1], dont M. Borel a fait l'étude systématique, et serons ainsi amenés, de la manière la plus naturelle, à d'autres processus sommatoires.

Méthodes basées sur les moyennes : sommations de Cesàro et de Hölder.

35. Nous avons déjà montré l'utilité de la méthode de la moyenne arithmétique, qui consiste à définir la somme d'une série par la limite de

$$\frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}.$$

---

[1] Nous parlerons de la méthode des facteurs de convergence dans l'Appendice (nos 85-88 inclus). Nous montrerons qu'il n'y a d'ailleurs entre cette méthode et celle des moyennes qu'une différence de forme.

La première application, d'un caractère général, qui ait été faite de cette méthode, paraît due à M. Cesàro [1]. Elle est relative à la multiplication des séries. Étant données deux séries convergentes

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, \tag{1}$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots, \tag{2}$$

Cauchy nous a appris à mettre leur produit sous la forme

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots. \tag{3}$$

Lorsque les séries (1) et (2) ne convergent absolument ni l'une ni l'autre, il peut arriver que la série (3) soit divergente. Néanmoins nous allons montrer avec M. Cesàro qu'elle est en tout cas sommable par la moyenne arithmétique, et que la limite de

$$\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}$$

est égale au produit des sommes des deux séries (1) et (2).

Posons pour abréger

$$u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0 = w_n,$$

$$U_n = \sum_0^n u_i, \qquad V_n = \sum_0^n v_i, \qquad W_n = \sum_0^n w_i.$$

On a visiblement

$$W_n = u_0 V_n + u_1 V_{n-1} + \ldots + u_n V_0,$$

d'où

$$\frac{W_0 + W_1 + \ldots + W_n}{n+1} = \frac{U_0 V_n + U_1 V_{n-1} + \ldots + U_n V_0}{n+1}.$$

Sachant que U_n tend vers U et V_n vers V, tout revient à prouver que le second membre tend vers UV. En effet, ce second membre peut s'écrire

$$\frac{U_0 V_n + \ldots + U_{p-1} V_{n-p+1}}{n+1} + \frac{U_p V_{n-p} + \ldots + U_{n-p} V_p}{n+1} + \frac{U_{n-p+1} V_{p-1} + \ldots + U_n V_0}{n+1},$$

en appelant p un entier vérifiant l'inégalité $2p < n$. Faisons

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIV, 1890.

croître indéfiniment p et n de manière que $p : n$ tende vers zéro. Les suites U_n et V_n étant bornées (puisqu'elles possèdent des limites) les termes extrêmes tendent vers zéro, tandis que le terme médian, quotient par $n+1$ de $n-2p+1$ termes tendant vers UV tend lui-même vers UV. C. Q. F. D.

36. Pour étendre une telle proposition, comme aussi pour généraliser (*voir* n° 40) le théorème de Frobenius énoncé dans l'Introduction, il était indiqué d'itérer les opérations de moyenne, et de poser par exemple avec Hölder ([1])

$$h_n^{(1)} = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n},$$

$$h_n^{(2)} = \frac{h_1^{(1)} + h_2^{(1)} + \ldots + h_n^{(1)}}{n} = \frac{n S_1 + (n-1) S_2 + \ldots + S_n}{n^2},$$

et, d'une manière générale,

$$h_n^{(k)} = \frac{h_1^{(k-1)} + h_2^{(k-1)} + \ldots + h_n^{(k-1)}}{n}.$$

A supposer que la limite, pour n infini, de $h_n^{(k)}$ existe, on dira que la série est sommable d'ordre k par les moyennes itérées de Hölder ou, plus brièvement, *sommable* (H, k).

En vertu des inégalités presque immédiates ([2])

$$\underline{\lim}\, h_n^{(k-1)} \leq \underline{\lim}\, h_n^{(k)} \leq \overline{\lim}\, h_n^{(k)} \leq \overline{\lim}\, h_n^{(k-1)},$$

cette définition satisfait bien à la condition de permanence, quel que soit l'indice k. En outre, nous avons une suite de procédés de

---

([1]) Pour la rédaction des n^{os} 36 à 41, nous avons consulté les ouvrages suivants : Hobson, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fouriers Series*, t. II (Cambridge University Press, London). — Knopp, *Theorie and Anwendung der unenlichen Reihen* (J. Springer, Berlin).

([2]) Le symbole $\underline{\lim}$ désigne ici et désignera par la suite la limite inférieure d'une suite de nombres, le symbole $\overline{\lim}$ désignera de même la limite supérieure. Par définition, la relation $\underline{\lim}\, u_n = l$ signifie que, quel que soit $\varepsilon (> 0)$, il n'y a dans la suite $\{u_n\}$ qu'un nombre fini de termes $< l - \varepsilon$, mais qu'il y en a une infinité compris entre $l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon$. Pour démontrer par exemple la première des inégalités ci-dessus, il suffit de noter ceci : le fait que les $h_n^{(k-1)}$ inférieurs à une valeur donnée sont en nombre fini entraine le même fait pour les $h_n^{(k)}$ inférieurs à ladite valeur.

sommation

$$(\mathrm{H}, 1), \quad (\mathrm{H}, 2), \quad \ldots, \quad (\mathrm{H}, k), \quad \ldots,$$

telle que deux d'entre eux soient liés par une relation d'ordre : soient deux entiers positifs distincts k et k'. Si l'on a $k < k'$, chaque série sommable (H, k) le sera (H, k') avec la même somme.

Mais d'autres voies s'ouvraient pour les généralisations précédentes ; Cesàro posa (¹)

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n,\\
S_n^1 &= S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_n,\\
S_n^2 &= S_0^1 + S_1^1 + S_2^1 + \ldots + S_n^1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
S_n^{k+1} &= S_0^k + S_1^k + S_2^k + \ldots + S_n^k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

relations par lesquelles on peut définir de proche en proche S_n^1, S_n^2, ..., S_n^k, ... comme formes linéaires à coefficients entiers et positifs de $S_0, S_1, \ldots, S_n$. On peut noter immédiatement que le coefficient de S_n dans l'une de ces formes sera toujours l'unité, que les coefficients de S_{n-1}, S_{n-2}, ... seront indépendants de n : ce fait, évident pour les premières valeurs de k, s'étend sans peine par récurrence. On peut donc poser

$$S_n^k = S_n + \gamma_1^k S_{n-1} + \gamma_2^k S_{n-2} + \ldots + \gamma_{n-1}^k S_1 + \gamma_n^k S_0.$$

De la forme de cette relation, il découle que $\gamma_1^k, \gamma_2^k, \ldots, \gamma_n^k$ sont les coefficients de S_0 dans les développements linéaires de S_1^k (suivant S_0, S_1), de S_2^k (suivant S_0, S_1, S_2), ..., de S_n^k suivant (S_0, S_1, S_2, ..., S_n). Revenons à celle des relations initiales qui donne S_n^{k+1} et écrivons que dans les deux membres développés linéairement en $S_0, S_1, \ldots, S_n$, le coefficient de S_0 est le même. Nous obtenons la relation

$$(1) \qquad \gamma_n^{k+1} = 1 + \gamma_1^k + \gamma_2^k + \ldots + \gamma_n^k.$$

(¹) Toute forme linéaire des $n+1$ premiers termes $u_0, u_1, \ldots, u_n$ d'une série est aussi une forme linéaire de $S_0, S_1, \ldots, S_n$. On passe de la première à la seconde par la transformation d'Abel. D'une manière générale, en vertu des formules ci-dessus, notre forme linéaire pourra s'exprimer aussi en fonction de S_0^k, S_1^k, ..., S_n^k : on sera amené à itérer la transformation d'Abel.

Il s'ensuit que l'expression

$$\mathcal{C}_n^k = \frac{S_n^k}{\gamma_n^{k+1}} = \frac{S_n + \gamma_1^k S_{n-1} + \gamma_2^k S_{n-2} + \ldots + \gamma_{n-1}^k S_1 + \gamma_n^k S_0}{1 + \gamma_1^k + \gamma_2^k + \ldots + \gamma_{n-1}^k + \gamma_n^k},$$

est une moyenne linéaire des éléments $S_n, S_{n-1}, S_{n-2}, \ldots, S_1, S_0$, obtenue en les affectant respectivement des poids $1, \gamma_1^k, \gamma_2^k, \ldots, \gamma_{n-1}^k, \gamma_n^k$ (1).

Il est d'ailleurs facile de calculer γ_n^{k+1}. Nous avons en effet, d'après la relation de récurrence (1),

$$(2) \qquad \gamma_n^{k+1} = \gamma_{n-1}^{k+1} + \gamma_n^k,$$

posons

$$\gamma_n^{k+1} = C_{n+k}^k,$$

nous aurons

$$C_{n+k}^k = C_{n+k-1}^k + C_{n+k-1}^{k-1},$$

formule récurrente qui est justement satisfaite par le nombre de combinaisons sans répétition de $n+k$ lettres prises k à k (ou encore n à n), ce qui donnerait

$$(3) \quad \gamma_n^{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)}{n!} = \binom{k+n}{n} \ (^2) \qquad [\text{et } \gamma_0^{k+1} = 1].$$

Pour justifier complètement cette formule, il suffit de remarquer qu'elle donne bien, quel que soit n, en faisant $k = 0$, la valeur $\gamma_n^1 = 1$, et quel que soit k, en faisant $n = 0$, la valeur $\gamma_0^{k+1} = 1$. Dès lors, traçons deux axes de coordonnées Ok, On, marquons les points à coordonnées entières et positives : l'expression (3) est valable pour ceux de ces points qui se trouvent sur les demi-droites Ok, On; d'autre part l'équation récurrente indéfinie (2) permet, connaissant les valeurs de γ_n^{k+1} sur ces demi-droites, d'en déduire les valeurs de la même expression en tout point à coordonnées entières et positives; ainsi l'expression (3) satisfait à la fois aux conditions aux limites et à l'équation récur-

(1) Par contre, l'expression $h_n^{(k)}$ introduite par Hölder n'est pas une moyenne : ainsi, en prenant $k = 2$, il vient $k_n^{(2)} = \frac{n S_1 + (n-1) S_2 + \ldots + S_n}{n^2}$, et le dénominateur n'est plus la somme des coefficients figurant en numérateur. C'est seulement à la limite que ces quantités deviennent des infiniment grands équivalents.

(2) Cette abrévation est aujourd'hui très employée pour représenter C_{n+k}^n.

rente indéfinie; elle fournit donc bien la valeur cherchée, de sorte que nous pouvons écrire

$$\mathcal{C}_n^k = \frac{S_n + \binom{k}{1} S_{n-1} + \binom{k+1}{2} S_{n-2} + \ldots + \binom{k+n-2}{n-1} S_1 + \binom{k+n-1}{n} S_0}{\binom{k+n}{n}}.$$

Cette expression se présente comme une moyenne linéaire à coefficients positifs des sommes $S_0, S_1, \ldots, S_n$, pourvu que k soit un nombre réel et positif. Nous pourrons donc, avec M. Chapman [1], étendre la notion de la sommabilité (C, k) aux valeurs non entières du paramètre k. Pour $k = 0$, on a $\mathcal{C}_n^k = S_n$; la sommabilité $(C, 0)$ est donc identique à la convergence ordinaire. En outre, l'expression de $\mathcal{C}_n^k$ reste fonction continue de k tant que k est supérieur à -1; par suite la notion de sommabilité (C, k) subsiste lorsque k est un nombre réel compris entre 0 et -1. Nous ferons dorénavant l'hypothèse unique $k > -1$. Indiquons maintenant une remarque qui nous sera très utile.

Sans altérer la définition de la sommabilité (C, k), il est permis de substituer au dénominateur de $\mathcal{C}_n^k$ un infiniment grand équivalent. Or, nous pouvons écrire

$$\binom{k+n}{n} = \frac{\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+1)};$$

en vertu de la formule de Stirling, $\frac{\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(n+1)}$ est un infiniment grand équivalent à n^k. Donc le dénominateur de $\mathcal{C}_n^k$ équivaut à

$$\frac{n^k}{\Gamma(k+1)}.$$

La recherche de la limite de $\mathcal{C}_n^k$ équivaut donc à celle de la limite de

$$\Gamma(k+1)\frac{S_n^k}{n^k}.$$

En résumé, pour que la série étudiée soit sommable (C, k), il faut et il suffit que $\frac{S_n^k}{n^k}$ possède une limite. Sa somme s'obtient alors en multipliant cette limite par $\Gamma(k+1)$.

---

(1) Chapman, *On non integral orders of Summability of series and integrale* (*Proc. London Math. Society*, 1910, p. 369-409).

37. Ces préliminaires posés, soient deux nombres réels quelconques k et k' tels que l'on ait $-1 < k < k'$. Nous allons prouver que, *si une série est sommable* (C, k), *elle l'est également* (C, k') *et avec la même somme.*

Pour établir ce théorème, remarquons avec Chapman la communauté des coefficients dans :

$$S_n^k = S_n + \gamma_1^k S_{n-1} + \gamma_2^k S_{n-2} + \ldots + \gamma_n^k S_0$$

$$\frac{1}{(1-x)^k} = 1 + \gamma_1^k x + \gamma_2^k x^2 + \ldots.$$

Si nous développons (¹)

$$\frac{S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \ldots + S_n x^n}{(1-x)^k},$$

nous obtiendrons, pour $|x| < 1$, une série absolument convergente, dans laquelle l'ensemble des $n+1$ premiers termes est précisément

$$S_0^k + S_1^k x + S_2^k x^2 + \ldots + S_n^k x^n.$$

Considérons maintenant le développement de

$$\frac{S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \ldots + S_n x^n}{(1-x)^{k'}} = \frac{1}{(1-x)^{k'-k}} \frac{S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \ldots + S_n x^n}{(1-x)^k},$$

l'ensemble des $n+1$ premiers termes de ce développement peut s'écrire

$$S_0^{k'} + S_1^{k'} x + S_2^{k'} x^2 + \ldots + S_n^{k'} x^n,$$

il coïncide d'autre part avec l'ensemble des $n+1$ premiers termes du produit

$$(S_0^k + S_1^k x + S_2^k x^2 + \ldots + S_n^k x^n)\left[1 + \binom{k'-k}{1} x + \binom{k'-k+1}{2} x^2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \binom{k'-k+n-1}{n} x^n\right],$$

(¹) En écrivant

$$S_0 + S_1 x + \ldots + S_n x^n = (1-x)(S_0^1 + S_1^1 x + \ldots + S_n^1 x^n) + S_n^1 x^{n+1},$$

on effectue la transformation d'Abel. En l'effectuant plusieurs fois de suite, on passe aux sommes d'indices supérieurs et l'on a ainsi l'explication rationnelle du résultat du calcul ci-dessus.

on a donc, en identifiant les termes en x^n,

$$S_n^{k'} = S_n^k + \binom{k'-k}{1} S_{n-1}^k + \binom{k'-k+1}{2} S_{n-2}^k + \ldots + \binom{k'-k+n-1}{n} S_0^k.$$

C'est sur cette relation que nous allons nous appuyer : nous allons en déduire que si $\frac{S_n^k}{n^k}$ possède une limite λ, l'expression $\frac{S_n^{k'}}{n^{k'}}$ tend elle-même vers une limite λ' et que l'on a

$$\lambda\,\Gamma(k+1) = \lambda'\,\Gamma(k'+1).$$

Notons à cet effet que $S_n^{k'}$ se présente sous la forme

$$\alpha_n \beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \alpha_{n-2}\beta_2 + \ldots + \alpha_0 \beta_n,$$

en posant $\alpha_p = S_p^k$ et $\beta_q = \binom{k'-k+q-1}{q}$. Il en résulte que β est un infiniment grand équivalent à $\frac{q^{k'-k-1}}{\Gamma(k'-k)}$. D'autre part, en vertu de notre hypothèse, α_p équivaut à λp^k. Nous aurons donc à prouver l'existence d'une limite pour l'expression

$$\frac{S_n^{k'}}{n^{k'}} = \frac{\alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \alpha_{n-2}\beta_2 + \ldots + \alpha_p\beta_{n-p} + \ldots + \alpha_0\beta_n}{n^{k'}},$$

sachant que les α et les β se comportent comme il vient d'être dit. Dans ce but, écrivons encore, en supposant $2p < n$,

$$\frac{S_n^{k'}}{n^{k'}} = \frac{\alpha_n\beta_0 + \ldots + \alpha_{n-p+1}\beta_{p-1}}{n^{k'}} + \frac{\alpha_{n-p}\beta_p + \ldots + \alpha_{p+1}\beta_{n-p-1}}{n^{k'}}$$
$$+ \frac{\alpha_p\beta_{n-p} + \ldots + \alpha_0\beta_n}{n^{k'}},$$

et faisons croître p indéfiniment en même temps que n, mais de manière que $\frac{p}{n}$ tende vers zéro. Dans ces conditions, la fraction médiane se comportera comme

$$\frac{\lambda}{\Gamma(k'-k)}\,\frac{(n-p)^k p^{k'-k-1} + (n-p-1)^k (p+1)^{k'-k-1} + \ldots + (p+1)(n-p-1)^{k'-k-1}}{(n-2p)^{k'}},$$

ou comme

$$\frac{\lambda}{\Gamma(k'-k)}\,\frac{1}{n}\Bigg[\left(1-\frac{p}{n}\right)^k\left(\frac{p}{n}\right)^{k'-k-1} + \left(1-\frac{p+1}{n}\right)^k\left(\frac{p+1}{n}\right)^{k'-k-1} + \ldots$$
$$+ \left(1-\frac{n-p-1}{n}\right)\left(\frac{n-p-1}{n}\right)^{k'-k-1}\Bigg],$$

quantité qui, dans les conditions indiquées, tend vers l'intégrale de forme bien connue

$$\frac{\lambda}{\Gamma(k'-k)}\int_0^1 x^{k'-k-1}(1-x)^k\,dx = \frac{\lambda\Gamma(k+1)}{\Gamma(k'+1)}.$$

D'autre part, il nous reste à voir ce que deviennent, dans la décomposition précédente, la première et la troisième fraction. La première contient en numérateur p termes dont chacun est moindre (en valeur absolue) qu'une quantité de la forme

$$A n^k n^{k'-k-1},$$

c'est-à-dire $A n^{k'-1}$, elle est donc moindre que $A\frac{p}{n}$ et par suite tend vers zéro. Il en est de même pour la troisième. Finalement, il est donc établi qu'il existe pour $\frac{S_n^{k'}}{n^{k'}}$ une limite donnée par

$$\lambda' = \frac{\lambda\Gamma(k+1)}{\Gamma(k'+1)}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

38. Nous avons donc l'exemple d'une famille de procédés de sommation à un paramètre k, qui sont *ordonnés les uns par rapport aux autres* de la même manière que les valeurs correspondantes de k. Cette notion générale de la sommabilité (C, k) conduit à des applications nombreuses. Mais, avant de nous en occuper, nous montrerons avec M. J. Schur (¹) que, *pour les valeurs entières de* k, *la méthode de Cesàro et celle de Hölder*, précédemment rencontrée, *sont équivalentes*.

Pour cela, nous remarquerons qu'un caractère formel commun à ces méthodes est de substituer aux sommes S_n de nouvelles sommes σ_n qui s'en déduisent par des relations de la forme

$$\sigma_n = a_{n1}S_1 + a_{n2}S_2 + \ldots a_{nn}S_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

lesquelles définissent une certaine substitution linéaire, portant sur une suite indéfinie de variables, substitution qu'on peut écrire schématiquement $\sigma = A(S)$. Nous dirons que l'opération A est *régulière* si les coefficients a_{mn} qui la définissent sont choisis de manière que la condition de permanence soit respectée, c'est-à-dire que l'existence d'une limite pour S_n entraîne, pour σ_n, celle

(¹) *Math. Annalen*, 1913, p. 447-458.

d'une limite égale. Si tous les a_{nn} sont $\neq 0$, on peut résoudre les équations précédentes par rapport à $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ et écrire schématiquement $S = A^{-1}(\sigma)$, en introduisant l'opération A^{-1} inverse de l'opération A. Si A et A^{-1} sont toutes deux régulières, nous dirons que l'opération A est *réversible*.

Soit B une opération du même type que A, permettant de déduire des σ_n de nouvelles variables τ_n, ce que nous représenterons schématiquement en écrivant $\tau = B(\sigma)$. L'opération composée par laquelle on peut déduire les τ_n des S_n pourra s'écrire

$$\tau = BA(S).$$

On pourra de même définir l'opération composée AB. Au cas où l'on a $AB = BA$, on dit que les opérations A et B sont *permutables*.

Il est clair que si A et B sont régulières, il en est de même de AB; il en est aussi de même de l'opération $\alpha A + (1 - \alpha) B$ [c'est-à-dire celle qui utilise les coefficients $\alpha a_{mn} + (1 - \alpha) b_{mn}$]. Il est clair aussi que si A et B sont réversibles, AB possède la même propriété.

Définissons maintenant des *opérations équivalentes*. Nous dirons que les opérations

$$\sigma = A(S), \qquad \tau = B(S)$$

sont équivalentes, si pour chaque suite $\{S_n\}$, les suites $\{\sigma_n\}$ et $\{\tau_n\}$ ou bien convergent en même temps vers la même valeur limite, ou bien sont toutes deux non convergentes. Nous avons d'ailleurs

$$\sigma = AB^{-1}(\tau), \qquad \tau = BA^{-1}(\sigma),$$

donc la condition d'équivalence de A et B se ramène à celle de régularité de chacune des opérations AB^{-1} et BA^{-1}.

Cela posé, désignons par M l'opérateur du type A qui permet de définir la sommabilité (H, 1) [ou ce qui revient au même (C, 1)], c'est-à-dire par lequel on déduit les h_n^1 des S_n, ce que nous rappelons en écrivant schématiquement

$$h^{(1)} = M(S).$$

Nous aurons $h^{(2)} = M[h^{(1)}] = M^2(S)$ et d'une manière générale l'opérateur $h^{(k)}$ sera la puissance $k^{\text{ième}}$ de l'opérateur M.

Considérons maintenant la sommabilité (C, k) : elle est de même définie, pour chaque valeur de k, par un opérateur $\mathcal{C}^{(k)}$. Il faut précisément prouver que, si k est entier, les opérations $h^{(k}$ et $\mathcal{C}^{(k)}$ sont équivalentes.

Nous avons, en effet, d'après une remarque précédemment rencontrée,

$$S_n^k = S_n^{k-1} + S_{n-1}^k;$$

en introduisant les $\mathcal{C}_n^k$, cette relation s'écrit

$$\binom{k+n}{n}\mathcal{C}_n^k = \binom{k-1+n}{n}\mathcal{C}_n^{k-1} + \binom{k+n-1}{n-1}\mathcal{C}_{n-1}^k$$

ou encore

$$(k+n)\,\mathcal{C}_n^k = k\,\mathcal{C}_n^{k-1} + n\,\mathcal{C}_{n-1}^k;$$

écrivons successivement cette relation pour les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$ et ajoutons membre à membre les égalités obtenues. Il vient

$$(n+1)\,\mathcal{C}_n^k + (k-1)(\mathcal{C}_0^k + \mathcal{C}_1^k + \ldots + \mathcal{C}_n^k) = k(\mathcal{C}_0^{k-1} + \mathcal{C}_1^{k-1} + \ldots + \mathcal{C}_u^{k-1})$$

ou encore, en divisant par $n+1$ (après interversion des deux membres),

$$k\,\mathrm{M}(\mathcal{C}^{k-1}) = (k-1)\,\mathrm{M}(\mathcal{C}^k) + \mathcal{C}^k.$$

Ainsi donc, nous avons entre les opérations $\mathcal{C}^{k-1}$ et $\mathcal{C}^k$ et l'opération M la relation

$$\mathrm{M}(\mathcal{C}^{k-1}) = \left(1-\frac{1}{k}\right)\mathrm{M}(\mathcal{C}^k) + \frac{\mathcal{C}^k}{k},$$

dont nous pouvons représenter symboliquement le second membre par $\mathcal{S}_k(\mathcal{C}^k)$, l'opérateur $\mathcal{S}_k$ étant défini de la manière suivante :

$$\mathcal{S}_k = \left(1-\frac{1}{k}\right)\mathrm{M} + \frac{\mathrm{E}}{k},$$

où E désigne la substitution identique. Notons immédiatement que chaque $\mathcal{S}_k$ est permutable avec M et aussi que $\mathcal{S}_k$ et $\mathcal{S}_{k'}$ sont toujours permutables entre eux.

De ces remarques, nous allons déduire l'équivalence annoncée :

1° Un raisonnement récurrent, fondé sur la relation

$$\mathrm{M}(\mathcal{C}^{k-1}) = \mathcal{S}_k(\mathcal{C}^k)$$

prouve que l'opération $h^{(k)}$ est liée à l'opération $\mathcal{C}^k$ par la relation

$$h^{(k)} = \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_3 \ldots \mathcal{S}_k [\mathcal{C}^k].$$

En effet, faisons $k = 1$. L'opérateur $\mathcal{S}_1$ est l'opérateur identique, et l'on a bien $h^{(1)} = \mathcal{C}'$. Admettons la relation pour la valeur k et justifions-là pour $k+1$. Nous aurons

$$h^{(k+1)} = \mathrm{M}[h^{(k)}] = \mathrm{M}[\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_3 \ldots \mathcal{S}_k (\mathcal{C}^k)].$$

Puisque M est permutable avec chacun des opérateurs $\mathcal{S}_i$, on a donc bien encore

$$h^{(k+1)} = \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_3 \ldots \mathcal{S}_k \mathrm{M}(\mathcal{C}^k) = \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_3 \ldots \mathcal{S}_k \mathcal{S}_{k+1}(\mathcal{C}^{k+1}).$$

Mais alors, tous les $\mathcal{S}_i$ sont des opérations régulières, et il en est de même du produit $\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \ldots \mathcal{S}_k$. Donc, si $\lim\limits_{n=\infty} \mathcal{C}_n^k$ *existe, l'expression* $h_n^{(k)}$ *converge vers la même valeur.*

2° Il nous suffit maintenant, en vertu des définitions précédentes, de prouver que l'opération $\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \ldots \mathcal{S}_k$ est réversible (c'est-à-dire régulière en même temps que son inverse); il suffit pour cela de montrer qu'il en est bien ainsi de $\mathcal{S}_k$. Or, en posant $\alpha = \frac{1}{k}$, la régularité de $\mathcal{S}_k^{-1}$ résulte immédiatement du théorème suivant :

Si de la suite u_n, on en déduit une seconde, ayant pour terme général

$$\alpha u_n + (1-\alpha)\frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1} \qquad (0 < \alpha),$$

l'existence d'une limite pour cette seconde suite entraîne celle d'une limite égale pour la première.

Posons, en effet,

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1},$$

d'où

$$u_n = (n+1)v_n - n v_{n-1}.$$

Soit λ la limite de la suite $\{\alpha u_n + (1-\alpha) v_n\}$. Nous pouvons écrire

$$(1) \qquad (1 + n\alpha) v_n - n\alpha v_{n-1} = \lambda + \varepsilon_n,$$

ε_n étant infiniment petit avec $\frac{1}{n}$. L'équation (1), qu'on peut mettre aussi sous la forme

$$(1') \qquad (1 + n\alpha)(v_n - \lambda) - n\alpha(v_{n-1} - \lambda) = \varepsilon_n,$$

peut être regardée comme une formule récurrente définissant la suite des $v_n - \lambda$ en fonction de la suite des ε_n. On peut d'ailleurs résoudre explicitement cette équation [1], et l'on trouve

$$(2) \qquad \begin{aligned} v_n - \lambda = {} & \frac{C}{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n\alpha}\right)} \\ & + \frac{\varepsilon_1}{\alpha\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n\alpha}\right)} \\ & + \frac{\varepsilon_2}{2\alpha\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n\alpha}\right)} + \cdots \\ & + \frac{\varepsilon_n}{n\alpha\left(1 + \frac{1}{n\alpha}\right)}; \end{aligned}$$

notons en passant que si l'on prenait, quel que soit n, la valeur

$$v_n - \lambda = 1,$$

on aurait, d'après (1'),

$$\varepsilon_n = 1,$$

d'où l'identité (d'ailleurs facile à vérifier)

$$(3) \qquad \begin{aligned} 1 = {} & \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n\alpha}\right)} \\ & + \frac{1}{\alpha\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n\alpha}\right)} \\ & + \frac{1}{2\alpha\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n\alpha}\right)} + \cdots + \frac{1}{n\alpha\left(1 + \frac{1}{n\alpha}\right)}. \end{aligned}$$

---

[1] On suivra une méthode analogue à celle qui fournit la solution d'une équation différentielle linéaire. Dans ce but, on résoudra d'abord l'équation sans second membre

$$(1 + n\alpha)V_n - n\alpha V_{n-1} = 0,$$

ce qui donne

$$V_n = \frac{C}{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n\alpha}\right)},$$

puis on remplacera C par une fonction auxiliaire w_n, etc.

De la formule (2), il est maintenant facile de déduire que $v_n - \lambda$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. En effet, séparons dans cette formule les p premiers termes et faisons croître p indéfiniment en même temps que n, en nous arrangeant de manière que le rapport $\frac{p}{\operatorname{Log} n}$ tende vers zéro. On prouve alors que le groupe des termes ainsi séparés tend vers zéro, en remarquant qu'il est moindre que

$$\frac{C\alpha}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} + \frac{\varepsilon_1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} + \frac{\varepsilon_2}{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} + \ldots + \frac{\varepsilon_{p-1}}{\frac{1}{p-1}+\ldots+\frac{1}{n}},$$

où les dénominateurs sont des infiniment grands équivalents à $\operatorname{Log} n$. Quant au groupe des termes restants, il tend aussi vers zéro, car il s'obtient en affectant de coefficients infiniment petits des termes positifs dont la somme est [en vertu de (3)] inférieure à l'unité.

Notre proposition auxiliaire est maintenant démontrée, car v_n tendant vers λ en même temps que $\alpha u_n + (1-\alpha)v_n$, il en est de même de u_n. L'équivalence des méthodes de sommation de Cesàro et de Hölder est donc établie.

39. Donnons maintenant quelques applications de la méthode de Cesàro. Nous avons déjà fait connaître, pour la sommabilité (C, 1), un théorème suivant lequel le produit de deux séries convergentes peut toujours s'obtenir par cette méthode. D'une manière plus générale, nous pouvons maintenant établir le théorème suivant :

Soient la série Σa_n, sommable (C, h), et la série Σb_n, sommable (C, k), et de sommes respectives a et b. Leur produit formel, obtenu par la règle de Cauchy, est sommable (C, $h+k+1$); la valeur de ce produit formel est égale à celle du produit des nombres a et b.

En effet, appelons S_n les sommes partielles $\sum^{n} a_n$, S'_n les sommes

partielles $\sum_1^n b_n$, d'où nous déduisons de proche en proche des suites auxiliaires S_n^r, $S_n'^r$. Par hypothèse,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^h}{n^h}=\frac{a}{\Gamma(h+1)},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n'^k}{n^k}=\frac{b}{\Gamma(k+1)}.$$

Formons l'expression

$$\frac{S_n^h S_0'^k + S_{n-1}^h S_1'^k + \ldots + S_0^h S_n'^k}{n^{h+k+1}},$$

et cherchons sa limite pour n infini. Nous trouvons ([1])

$$\frac{ab}{\Gamma(h+k+2)}.$$

Considérons maintenant dans les développements de

$$\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{(1-x)^{h+1}}\quad\text{et}\quad\frac{b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n}{(1-x)^{k+1}},$$

l'ensemble des $n+1$ premiers termes; nous obtenons les deux polynomes

$$P(x)=S_0^h+S_1^h x+S_2^h x^2+\ldots+S_n^h x^n,$$
$$Q(x)=S_0'^k+S_1'^k x+S_2'^k x^2+\ldots+S_n'^k x^n.$$

Si nous effectuons le produit de Cauchy de ces deux développements, nous obtiendrons le développement de la fraction

$$\frac{(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n)}{(1-x)^{h+k+2}},$$

dans lequel le polynome $\varpi(x)$ des $n+1$ premiers termes est identique à celui du développement de

$$\frac{c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n}{(1-x)^{h+k+2}}\quad\text{où}\quad c_i=a_ib_0+\ldots+a_0b_i\quad(i=1,2,\ldots,n).$$

Affectons de doubles accents les sommes partielles (des divers ordres) relatives à la série des c_n (qui est précisément

---

([1]) Le calcul se dirige exactement de la même manière qu'au n° 37. Dans les deux cas, on se ramène à l'application du lemme suivant, dû à Cesàro : sachant que $\frac{\alpha_n}{n^h}$ et $\frac{\beta_n}{n^k}$ possèdent des limites a et b, le rapport $\frac{\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\ldots+\alpha_n\beta_0}{n^{h+k+1}}$ possède lui-même une limite égale à $\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(h+k+2)}ab$. Ce lemme a été précédemment établi (*loc. cit.*) aux notations près.

le produit formel). Le polynome $\varpi(x)$ peut encore s'écrire

$$\sum_{i=0}^{n} (S_i^h S_0'^k + \ldots + S_0^h S_i'^k)\, x^i.$$

Mais $\varpi(x)$ est aussi l'ensemble des $n+1$ premiers termes du produit $P(x)Q(x)$. En égalant les coefficients de x^n, il vient

$$S_n''^{h+k+1} = S_n^h S_0'^k + S_{n-1}^h S_1'^k + \ldots + S_0^h S_n'^k;$$

d'après ce qui précède, $\dfrac{S_n'^{h+k+1}}{n^{h+k+1}}$ a donc une limite et la démonstration s'achève aisément.

40. Une autre application importante est l'extension du théorème de Frobenius, énoncé dans l'Introduction. *Supposons que la série Σa_n soit sommable* (C, k), *sa somme étant égale à* s, *et que la série entière $\Sigma a_n z^n$ soit convergente au moins pour* $|z| < 1$. *Désignons par $f(z)$ la fonction définie par cette série. On a*

$$\lim_{z \succ 1} f(z) = s,$$

pourvu que la suite des valeurs par lesquelles z tend vers 1 *ait pour images dans le plan de la variable complexe z des points qui soient tous intérieurs à un angle obtus, aussi voisin de deux droits que l'on veut, ayant pour sommet le point* $z = +1$ *et pour bissectrice intérieure l'axe réel.*

En effet, soit $\{z_i\}$ une suite de tels points. D'après la propriété d'ordre établie précédemment, il est permis de supposer k entier. Or, en appliquant plusieurs fois de suite la transformation d'Abel (¹), nous obtenons

$$f(z_i) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_i^n = (1 - z_i) \sum_{n=0}^{\infty} S_n z_i^n = (1 - z_i)^2 \sum_{n=0}^{\infty} S_n^1 z_i^n$$
$$= (1 - z_i)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k z_i^n.$$

(¹) En donnant la définition de Cesàro, nous avons fait remarquer qu'elle était de nature à rendre immédiate l'application itérée de cette transformation.

Par hypothèse, la quantité

$$\mathcal{C}_n^k = \frac{S_n^k}{\binom{n+k}{k}}$$

tend, pour n infini, vers la limite s. Exprimons les quantités $f(z_i)$

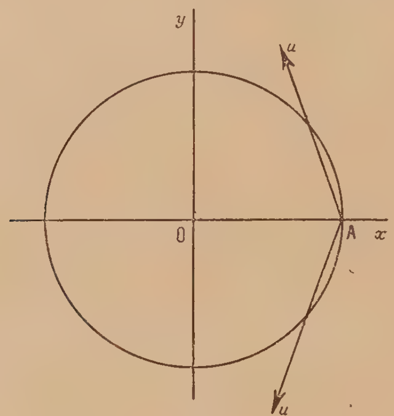

Fig. 9.

en fonctions linéaires (à un nombre illimité de variables) des $\mathcal{C}_n^k$. Nous aurons, d'après le calcul précédent,

$$f(z_i) = (1 - z_i)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n^k \binom{n+k}{k} z_i^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n^k \binom{n+k}{k} z_i^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z_i^n},$$

ce qu'on peut encore écrire sous la forme d'une suite indéfinie de relations telles que

$$f(z_i) = a_{i0}\mathcal{C}_0^k + a_{i1}\mathcal{C}_1^k + \ldots + a_{in}\mathcal{C}_n^k + \ldots \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

en posant

$$a_{in} = (1 - z_i)^{k+1} z_i^n \binom{n+k}{k} = \frac{\binom{n+k}{k} z_i^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z_i^n}.$$

Les quantités a_{in} sont les éléments d'un tableau rectangulaire, indéfini vers la droite et vers le bas (l'indice i désignant la ligne et n la colonne), et tel :

1° Que chaque colonne forme une suite dont le terme général tend vers zéro;

2° Que chaque ligne constitue une série convergente, de somme égale à l'unité;

3° Tel enfin que cette série, possède la convergence absolue et que la somme de la série des modules reste inférieure à un nombre fixe indépendant de i,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{in}| = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} |z_i^n|}{\left|\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z_i^n\right|} = \frac{|1-z_i|^{k+1}}{(1-|z_i|)^{k+1}}.$$

Grâce au fait que les points z_i restent intérieurs à l'angle $u'\mathrm{A}u$, il existera un nombre fixe et tel qu'on ait

$$\frac{|1-z_i|}{1-|z_i|} < \mathrm{A},$$

et, par suite, nous aurons bien

$$\sum_{0}^{\infty} |a_{in}| < \mathrm{A}^{k+1} \qquad \text{(quantité indépendante de } i\text{)}.$$

Mais alors, de la réalisation simultanée des conditions 1°, 2°, 3°, on peut déduire que si les $\mathcal{C}_n^k$ ont une limite s, il existe une limite égale pour la suite $\{f(z_i)\}$.

En effet, nous pouvons écrire (en vertu de 2°) :

$$f(z_i) - s = a_{i0}(\mathcal{C}_0^k - s) + a_{i1}(\mathcal{C}_1^k - s) + \ldots + a_{ik}(\mathcal{C}_i^{\mathrm{K}} - s) - \ldots.$$

Sachant que les $\mathcal{C}_n^k - s$ tendent vers zéro, il faut en déduire la même propriété pour la suite $\{f(z_i) - s\}$. Donnons-nous arbitrairement $\varepsilon > 0$. Puis déterminons m de telle sorte que l'inégalité $n > m$ entraîne

$$|\mathcal{C}_n^k - s| < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{A}^{k+1}}.$$

Nous aurons

$$|f(z_i)-s| \leqq |a_{i0}(\mathcal{C}_0^k-s)+a_{i0}(\mathcal{C}_1^k-s)+\ldots+a_{im}(\mathcal{C}_m^k-s)|+\frac{\varepsilon}{2};$$

m étant ainsi déterminé, nous pouvons (en vertu de 1°) prendre i assez grand pour que le premier terme soit lui-même moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$, et la proposition est démontrée.

Ainsi se trouve généralisé le théorème classique de continuité d'Abel ([1]).

41. Il importe maintenant de juger de la puissance de la méthode de Cesàro : quel est le champ des séries auxquelles la sommabilité (C, k) s'applique ? Le théorème suivant fournit une réponse partielle à cette question :

Pour qu'une série Σa_n *soit sommable* (C, k) (*où* $k > -1$), *il faut que* $\frac{a_n}{n^k}$ *tende vers zéro.*

Nous nous bornerons à établir ce théorème en supposant k entier et positif (le cas où k est nul se réduisant à un énoncé classique).

([1]) On s'est préoccupé d'obtenir des réciproques du théorème d'Abel. Signalons les énoncés suivants de Tauber :

1° Soit la série $\Sigma a_n z^n$ convergente dans le cercle de rayon 1. Si na_n tend vers zéro et si l'une des limites $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\lim_{z=1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ existe, l'autre existe et lui est égale. En outre, si l'une des deux expressions $\sum_0^n a_\nu$ et $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ oscille entre deux limites finies, l'autre oscille entre les mêmes limites.

2° Si le rapport $\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n}$ tend vers zéro et si la somme $f(z)$ de la série tend vers une limite quand z tend vers 1, alors Σa_n est une série convergente ayant pour somme $f(1)$. Ces deux conditions simultanées sont nécessaires et suffisantes pour la convergence de Σa_n.

Pour les démonstrations de ces théorèmes et certaines extensions de MM. Hardy et Littlewood, nous renverrons le lecteur au Tome II du Traité de M. Hobson : *The Theory of a Function of a real variable and the theory of Fouriers series* (nos 130, 131, 132).

On peut écrire

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (S^1_n - S^1_{n-1}) - (S^1_{n-1} - S^1_{n-2}) = S^1_n - 2S^1_{n-1} + S^1_{n-2}$$
$$= S^2_n - 3S^2_{n-1} + 3S^2_{n-1} - S^2_{n-2} = \ldots,$$

les coefficients de chaque forme étant ceux du binome, avec alternativement les signes $+$ et $-$. D'une manière générale, nous aurons, en supposant $n \geqq k+1$,

$$a_n = S^k_n - \binom{k+1}{1} S^k_{n-1} + \binom{k+1}{2} S^k_{n-2} + \ldots + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{k+1} S^k_{n-k-1},$$

formule dont le second membre se compose de $k+2$ termes dont la somme des coefficients est nulle. Divisons les deux membres par n^k : les quotients

$$\frac{S^k_n}{n^k}, \quad \frac{S^k_{n-1}}{n^k}, \quad \ldots, \quad \frac{S^k_{n-k-1}}{n^k}$$

tendent tous vers une même limite, et puisque la somme des coefficients est nulle, on obtient bien

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^k} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De ce théorème, il résulte immédiatement qu'appliquée à une série entière, la méthode de Cesàro ne permettra dans aucun cas de sommer cette série hors du cercle de convergence. Il pourra même arriver qu'elle soit inopérante sur ce cercle pour des points où la somme $f(z)$ de la série tend cependant vers une limite (¹). Pour obtenir un exemple d'un tel cas, il suffit de prendre, avec M. Landau,

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{1+z}}}{1+z} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+z)^{m+1}}.$$

(¹) Voici cependant un énoncé utile dans la pratique : Une série de Taylor est sommable (C, k) en tout point non singulier du cercle de convergence, pourvu que le rapport $\frac{a_n}{n^k}$ tende vers zéro. *Voir* la démonstration dans le livre de M. Dienes, de la même collection, *sur les singularités des fonctions analytiques*, p. 55-58 : suivent des énoncés plus précis (p. 59-65), où l'on suppo[se] seulement que la fonction a une valeur limite bien déterminée.

On a donc ici, quel que soit k,

$$(-1)^n a_n = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \binom{n+m}{m} > \frac{1}{(k+1)!} \binom{n+k+1}{k+1} > \frac{n^{k+1}}{[(k+1)!]^2},$$

donc le rapport $\frac{a_n}{n^k}$ ne tend vers zéro pour aucune valeur de l'entier k. La série proposée est d'ailleurs la somme d'une suite de séries obtenues en faisant $z = 1$ dans les développements des fractions telles que $\frac{1}{m!} \frac{1}{(1+z)^{m+1}}$, lesquelles sont respectivement sommables (C, 1), (C, 2), ..., (C, m), ... Le principe d'obtention de cet exemple apparaît donc clairement et peut d'ailleurs se généraliser.

Étude comparée de diverses méthodes de sommation par moyennes.

42. Nous venons de voir que l'efficacité de la méthode de Cesàro, quoique appréciable, est cependant limitée par des conditions relatives à la croissance des termes de la série. Il y a donc lieu de chercher ce que donne la méthode des moyennes, appliquée dans des conditions plus générales [1].

Soit une suite doublement infinie de coefficients positifs a_{mn} qui forment un tableau rectangulaire indéfini vers le bas et vers la droite, dans lequel m et n indiquent respectivement la ligne et la

---

(1) Borel, *Sur la sommation des séries divergentes* (*Comptes rendus*, 30 décembre 1895). *Voir* aussi sur la théorie des séries sommables les Mémoires suivants : Borel, *Sur la généralisation de la notion de limite et sur l'extension aux séries divergentes sommables du théorème d'Abel sur les séries entières* (*Comptes rendus*, 13 janvier 1896). *Applications de la théorie des séries divergentes sommables* (*Comptes rendus*, 7 avril 1896). *Sur la région de sommabilité d'un développement de Taylor* (*Comptes rendus*, 5 octobre 1896). *Sur les séries de Taylor* (*Comptes rendus*, 14 octobre 1896). *Les séries absolument sommables, les séries* (M) *et le prolongement analytique* (*Comptes rendus*, 19 novembre 1900). *Fondements de la théorie des séries divergentes sommables* et *Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure* (*Journal de M. Jordan*, 1896). *Mémoire sur les séries divergentes* (*Annales de l'École Normale*, 1899.). — Servant, *Sur les points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor* (*Comptes rendus*, t. 128, p. 80, janvier 1899), et *Thèse : Essai sur les séries divergentes* (Paris, Gauthier-Villars, 1899).

colonne. A l'aide de ces coefficients, calculons les moyennes σ_m des termes de la suite $\{S_n\}$, définies par les formules

$$(1)\quad \sigma_m = \frac{a_{m0} S_0 + a_{m1} S_1 + \ldots + a_{mn} S_n + \ldots}{a_{m0} + a_{m1} + \ldots + a_{mn} + \ldots} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

ou par les formules équivalentes

$$(1')\quad \sigma_m = \alpha_{m0} S_0 + \alpha_{m1} S_1 + \ldots + \alpha_{mn} S_n + \ldots \qquad \left(\text{où } \alpha_{mn} = \frac{a_{mn}}{\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}}\right).$$

Ces formules définissent une substitution linéaire, portant sur une suite infinie de variables, substitution qui pourra engendrer, moyennant certaines conditions, une méthode de sommation. Pour cela, il faudra que la transformation soit régulière, c'est-à-dire que si les S_m convergent vers une limite S, les σ_m convergent vers la même limite (condition de permanence). Nous allons montrer que cette condition peut s'écrire

$$(2)\qquad \lim_{m \to \infty} \alpha_{mn} = 0 \qquad (\text{quel que soit } n).$$

En effet, prenons une suite $\{S_n\}$ ayant ses termes nuls, sauf le $(n+1)^{\text{ième}}$, qui égalera l'unité. Cette suite tend vers zéro, donc la suite $\{\sigma_m\}$ correspondante (formée des termes $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{mn}, \ldots$) tend aussi vers zéro : la condition (2) est donc nécessaire. Elle est suffisante dans le cas où les S_n tendent vers zéro, car étant donné ε, on peut trouver m_1 tel que l'inégalité $m > m_1$ entraîne $|\sigma_m| < \varepsilon$; pour le voir, on séparera dans σ_m l'ensemble des p premiers termes; on peut prendre p assez grand pour que la somme des termes restants soit $< \frac{\varepsilon}{2}$ (puisque les S_n tendent vers zéro et que la somme des coefficients est < 1); p étant ainsi choisi, on peut prendre m assez grand pour que la somme des p premiers termes soit elle-même moindre [en vertu de (2)] que $\frac{\varepsilon}{2}$. Du cas où les S_n tendent vers zéro et du cas immédiat où les S_n sont tous égaux, on passe à celui où les S_n convergent vers une limite quelconque : notre conclusion suivant laquelle la condition (2) est suffisante demeure

encore valable (¹). Enfin, un jeu évident d'inégalités montrerait que si S_n tend vers $\pm\infty$, il en est de même de σ_m.

43. Reprenons la relation (2), qui exprime la régularité. Elle exige que, dans σ_m, l'ensemble des termes provenant des sommes

---

(¹) On doit à M. Schur (*Journ. für reine und angewand Math.*, t. 151, p. 79-111) un énoncé des conditions nécessaires et suffisantes de régularité d'une substitution

$$\sigma_m = \alpha_{m1} S_1 + \alpha_{m2} S_2 + \ldots + \alpha_{mn} S_n + \ldots \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

dans le cas général où les α_{mn} sont complexes. Ces conditions sont au nombre de trois, devant être vérifiées simultanément :

1° *Pour chaque valeur de n, on a*

$$\lim_{m \to \infty} \alpha_{mn} = 0;$$

2° *Pour chaque valeur de m, la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn}$$

est convergente et sa somme tend vers 1 *pour m infini;*

3° *Cette série détient même la convergence absolue et la somme de la série des modules demeure bornée, quel que soit m.*

La nécessité de la condition 1° s'établit comme dans le texte; celle du 2° en considérant une suite ayant tous ses termes égaux. Celle de 3° est moins immédiate : d'abord, pour qu'une série $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_n S_n + \ldots$ converge chaque fois que les S_n tendent vers une limite, il faut et il suffit que $\Sigma \alpha_n$ soit absolument convergente; la condition est manifestement suffisante, elle est aussi nécessaire, car si $s_n = |\alpha_1| + \ldots |\alpha_n|$ diverge, en prenant $\alpha_n S_n = \frac{|\alpha_n|}{s_n}$ (ou bien $S_n = 0$ lorsque exceptionnellement α_n s'annule), d'une part, les S_n convergent vers zéro; d'autre part, la série $\sum \alpha_n S_n = \sum \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|}$ est divergente [car le terme général peut s'écrire $\frac{s_n - s_{n-1}}{s_n}$, les s_n croissant et tendant vers $+\infty$, et l'ensemble des termes depuis le $n^{\text{ième}}$ jusqu'au $(n+p)^{\text{ième}}$ peut surpasser un nombre fixe, tel $\frac{1}{2}$, quel que soit n]. D'après cela, il est donc nécessaire que la série $\sum |\alpha_{mn}|$ soit convergente pour chaque m. Mais il faut encore supposer que la somme reste bornée dans le champ des valeurs de m. Nous renverrons, pour la démonstration un peu plus délicate de ce point, au Mémoire de M. Schur.

Le fait que les conditions sont suffisantes s'établit par un raisonnement identique à celui qui nous a permis d'achever la démonstration du théorème de Frobenius généralisé, après avoir constaté que les $f(z_i)$ sont des moyennes à coefficients complexes de quantités $\mathcal{C}_n^k$ (n° 40).

dont l'indice surpasse un certain entier devienne prépondérant lorsque m tend vers $+\infty$. En outre, le parti qu'on peut tirer de la présence simultanée des deux indices m et n réside dans la possibilité, pour chaque valeur de m, de prendre les a_{mn} assez rapidement décroissants avec n pour assurer la convergence de $\Sigma a_{mn} S_n$ dans des limites de plus en plus larges, et par là d'atteindre des séries formant des champs de plus en plus étendus.

Examinons quelques formes particulières simples pour les a_{mn} :

1° Pour définir la sommabilité (C, k), nous avons adopté pour le tableau des a_{mn} la forme

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{cccccc} c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & \ldots \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right. \qquad (c_n > 0).$$

La condition nécessaire et suffisante de régularité se réduit alors à

$$(3') \qquad \lim_{n=\infty} \frac{c_n}{c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n} = 0.$$

2° On peut aussi considérer le cas où le tableau des a_{mn} a la forme

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{cccccc} c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ c_0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & \ldots \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right. \qquad (c_n > 0).$$

La condition nécessaire et suffisante de régularité est que la série à termes positifs Σc_n soit divergente. Supposons-la remplie. On peut présenter quelques remarques simples :

a. La forme actuelle fournit *des cas de sommabilité ordonnés*, conformément à ce théorème de M. G. Hardy :

Si pour une suite $\{S_n\}$, *l'expression*

$$\sigma_n = \frac{c_0 S_0 + c_1 S_1 + \ldots + c_n S_n}{c_0 + c_1 + \ldots + c_n}$$

possède une limite σ, l'expression

$$\tau_n = \frac{c_0 S_0 + c_1 \varepsilon_1 S_1 + \ldots + c_n \varepsilon_n S_n}{c_0 + c_1 \varepsilon_1 + \ldots + c_n \varepsilon_n}$$

tend vers une limite égale, pourvu que (condition suffisante) *les ε_n forment une suite non croissante, telle que la série $\Sigma \varepsilon_n c_n$ soit divergente.*

En effet, la transformation d'Abel permet d'écrire

$$\tau_n = \frac{(1-\varepsilon_1) c_0 \sigma_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(c_0 + c_1)\sigma_1 + \ldots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)\left(\sum_0^{n-1} c_i\right)\sigma_{n-1} + \varepsilon_n \left(\sum_0^n c_i\right)\sigma_n}{(1-\varepsilon_1) c_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(c_0 + c_1) + \ldots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)\sum_0^{n-1} c_i + \varepsilon_n \sum_0^n c_i}.$$

L'existence d'une limite pour τ_n, égale à celle des σ_n, s'établit alors en séparant haut et bas les p premiers termes et faisait croître p et n indéfiniment de manière que la somme des p premiers termes du dénominateur soit négligeable par rapport au dénominateur entier : c'est possible, puisque $\Sigma \varepsilon_n c_n$ diverge. Dans ces conditions, au numérateur, les σ_i d'indices supérieurs à $p - 1$ tendent vers la limite σ et le résultat annoncé s'en déduit immédiatement.

En résumé, la sommabilité du type actuel, ou comme nous dirons pour abréger, par les séries divergentes, voit son efficacité s'accroître lorsque la série Σc_n employée diverge plus lentement.

b. On aperçoit, en outre, des résultats relatifs à la comparaison des procédés de sommation : deux procédés réguliers, appliqués à une même série non convergente peuvent naturellement donner des résultats différents. Soit la série d'Euler :

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

pour laquelle nous avons

$$S_0 = S_2 = S_4 = \ldots = 1, \qquad S_1 = S_3 = S_5 = \ldots = 0,$$

posons

$$c_0 = c_2 = c_4 = \ldots = a, \qquad c_1 = c_3 = c_5 = \ldots = b \qquad (a > 0, b > 0),$$

alors Σc_n diverge, il y a donc régularité. Cependant, la somme

$$\frac{a}{a+b}$$

assignée à la série dépend de $b : a$.

Le précédent théorème de M. G. Hardy prend par cette remarque un intérêt spécial. Il est, en effet, essentiel de pouvoir reconnaître la concordance de divers procédés de sommation. Par exemple, ce théorème nous apprend que si une série est sommable (C, 1), elle l'est également par les moyennes

$$\frac{c_0 S_0 + c_1 S_1 + \ldots + c_n S_n}{c_0 + c_1 + \ldots + c_n}$$

toutes les fois que la suite $\{c_n\}$ est non croissante. La somme obtenue par ces divers procédés est toujours la même.

3° Supposons maintenant que le tableau des a_{mn} soit de la forme suivante, considérée par M. Borel :

$$(5) \qquad \left| \begin{array}{llllll} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n & \ldots, \\ c_0 & 2c_1 & 2^2 c_2 & \ldots & 2^n c_n & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ c_0 & c_1 m & c_2 m^2 & \ldots & c_n m^n & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array} \right.$$

de manière que la série

$$\varphi(m) = c_0 + c_1 m + c_2 m^2 + \ldots$$

converge quel que soit m entier ; dès lors, cela aura lieu pour m quelconque, et la fonction

$$\varphi(a) = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots$$

de la variable continue a sera une fonction entière. La somme de la série divergente sera ici définie par

$$S = \lim_{a \to \infty} \frac{c_0 S_0 + c_1 a S_1 + c_2 a^2 S_2 + \ldots + c_n a^n S_n + \ldots}{\varphi(a)}.$$

D'où une nouvelle notion, celle de la sommation par les fonctions entières. On s'assure bien aisément que la condition de régularité est toujours satisfaite : c'est ce qui ressort de l'expression de α_{mn} :

$$\alpha_{mn} = \frac{c_n m^n}{\varphi(m)}.$$

43 *bis*. Nous allons maintenant approfondir les questions de concordance et d'efficacité comparée de ces différents procédés de sommation. Nous nous en référerons pour cela aux résultats qu'ils fournissent en matière de prolongement analytique. Considérons

en particulier à l'extérieur du cercle de convergence, c'est-à-dire pour $|u| > 1$, la série suivante :

$$1 + u + u^2 + \ldots + u^n + \ldots.$$

Nous accorderons une place privilégiée aux méthodes sommatoires, qui, là où elles réussissent, confèrent à cette série la somme $\frac{1}{1-u}$ (¹).

Notons que, par essence même, il n'arrivera jamais qu'un procédé régulier (et notamment l'un des précédents) réussisse en aucun point de la demi-droite $(1, +\infty)$ de l'axe réel; le fait que les sommes S_n tendent alors vers $+\infty$ entraînera, en vertu de la régularité, la même propriété pour les sommes σ_n. Donc, on devra toujours rester, quel que soit le procédé de sommation, à l'intérieur de l'étoile, relative au point O, de la fonction $\frac{1}{1-u}$.

Pourquoi avons-nous considéré la série spéciale Σu^n? Précisément, en vertu du rôle de *noyau générateur* de l'intégrale de Cauchy, joué par la fonction

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{x}{z}}\right] = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-u}.$$

Supposons [hypothèse (h)] qu'un procédé sommatoire réussisse pour la série Σu^n dans une portion $\mathcal{R}$ de son étoile relative à O. Par exemple, supposons qu'il s'agisse du procédé attaché au tableau des a_{mn}, pour un choix convenable de ses éléments, conforme à la condition de permanence du n° 42, ainsi qu'à l'hypothèse suivante :

(h') quel que soit l'entier m, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}\, u^n$ converge dans $\mathcal{R}$ (²).

En appelant S_n la somme des n premiers termes de $1 + u + u^2 + \ldots$ nous aurons donc, si u est dans $\mathcal{R}$,

$$\frac{1}{1-u} = \lim_{m=\infty} \frac{a_{m0}S_0 + a_{m1}S_1 + \ldots + a_{mn}S_n + \ldots}{a_{m0} + a_{m1} + \ldots + a_{mn} + \ldots}.$$

(¹) Cette manière de faire, conforme aux idées de M. Borel en ces matières, sert aussi de guide à M. Le Roy dans son Mémoire des *Annales de Toulouse* (1900) M. Oscar Perron l'a également utilisée dans un travail récent où il se place au point de vue des facteurs de convergence (*voir* l'Appendice, n° 87).

(²) Dans la sommation, par les fonctions entières (h') sera toujours vérifiée.

En vertu de l'identité

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \ldots + u^n + \frac{u^{n+1}}{1-u} = S_n + \frac{u^{n+1}}{1-u}$$

$$\left(\text{d'où } S_n = \frac{1-u^{n+1}}{1-u}\right),$$

l'hypothèse (h) équivaut en chaque point de la région $\mathcal{R}$ à la condition

$$(6) \qquad \lim_{m=\infty} \frac{a_{m0} + a_{m1} u + \ldots + a_{mn} u^n + \ldots}{a_{m0} + a_{m1} + \ldots + a_{mn} + \ldots} = 0.$$

Nous supposerons encore [hypothèse (h'')] que cette limite est atteinte *uniformément dans* $\mathcal{R}$: ce qui aura toujours lieu, en vertu de (h), si les fractions au premier membre de (6), et contenant l'indice m, sont, dans leur ensemble, bornées dans $\mathcal{R}$ [1].

Considérons maintenant une fonction analytique $f(x)$, holomorphe autour de $x=0$ et définie par la série

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots.$$

Supposons déterminée l'étoile de cette fonction relative au point O et soit C un contour intérieur à celle-ci. Nous aurons

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z} \left[1 + \frac{x}{z} + \ldots + \frac{x^n}{z^n}\right] dz + \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{x^{n+1} f(z)}{z^{n+1}(z-x)}\, dz \\ &= b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{x^{n+1} f(z)}{z^{n+1}(z-x)}\, dz. \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'en appliquant la précédente méthode de sommation à la série $\Sigma b_n x^u$, nous trouverons bien la somme $f(x)$, chaque fois que sera réalisée la condition suivante :

$$(7) \qquad \lim_{m \succ \infty} \frac{\displaystyle\int_C \frac{x}{z} \frac{f(z)}{z-x} \left(a_{m0} + a_{m1} \frac{x}{z} + \ldots + a_{mn} \frac{x^n}{z^n} + \ldots\right) dz}{a_{m0} + a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn} + \ldots} = 0.$$

En vertu de la convergence uniforme entraînant l'égalité entre la limite de l'intégrale et l'intégrale de la limite, ce résultat

---

[1] *Comparez* Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, 4e édition, t. II, p. 672 et suivantes.

sera acquis, pour une valeur de x et un contour C donnés, chaque fois que tous les points $\frac{x}{z}$ (z occupant une position arbitraire sur C) tomberont dans la région $\mathcal{R}$ du plan de la variable complexe u, ou encore, chaque fois que le point x sera commun aux régions $z\mathcal{R}$, déduites de $\mathcal{R}$ par les similitudes de centre O transformant le point 1 en quelque point z du contour C.

Par exemple, nous étudierons plus loin le cas où l'on pose, avec M. Borel,

$$a_{mn} = \frac{m^n}{n!}. \tag{8}$$

La condition (6) deviendra alors

$$\lim_{m \to \infty} \frac{e^{mu}}{e^m} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \text{partie réelle de } u < 1;$$

la région $\mathcal{R}$ sera donc ici un demi-plan, limité par la perpendiculaire à la branche unique de l'étoile de $\frac{1}{1-u}$, menée par l'origine 1 de cette branche. De là, en remarquant que (h'') est bien vérifiée

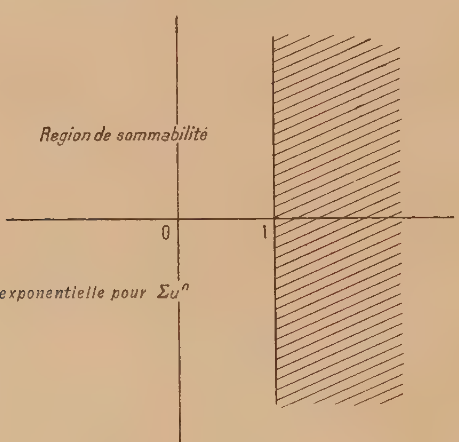

Fig. 10.

dans tout domaine, à distance finie, intérieur à ce demi-plan, nous conclurons à la sommabilité de toute série entière $f(x)$ par le procédé (8) ou *procédé exponentiel*

$$[\varphi(a) = e^a]$$

dans la région du plan, qui relativement à l'origine est en deçà des perpendiculaires menées aux branches de l'étoile de $f(x)$ par les points singuliers d'où elles sont issues : cette région (qui sera le polygone de sommabilité) est en effet le domaine maximum que les régions $z\mathcal{R}$ puissent ici posséder en commun.

Nous reviendrons sur cette question importante (*voyez* n^{os} 65 et 82). Mais nous voyons déjà que la théorie des fonctions analytiques nous fournira le moyen le plus sûr pour éprouver la valeur comparée des procédés de sommation. L'exemple que nous venons d'indiquer nous montre la possibilité de sortir, par certains procédés, du cercle de convergence.

44. A cet égard, il convient de faire remarquer que la méthode de sommation par les fonctions entières, attachée au tableau (5) présente un privilège sur les méthodes attachées à des tableaux de l'une des formes (3) ou (4). Des méthodes de ce genre ne permettent pas de sortir du cercle de convergence pour la série $\frac{1}{1-u}$; il serait donc vain d'essayer de les appliquer au prolongement analytique en général. Nous reviendrons plus en détail sur ces questions dans une note à la fin de ce volume.

Remarquons enfin que, dans le cas de la sommation par les fonctions entières, la condition (6) prend la forme

$$\lim_{m=\infty} \frac{\varphi(mu)}{\varphi(m)} = 0. \tag{9}$$

La méthode sera donc applicable au prolongement analytique dans un champ d'autant plus large que la relation (9) sera satisfaite dans une portion plus étendue du plan de la variable u. Pour la discussion de cette question, en connexion étroite avec la théorie des fonctions entières, nous renverrons le lecteur à un excellent exposé de M. Buhl, dans le fascicule VII du *Mémorial des Sciences mathématiques* (Chap. III et IV).

Nous laisserons pour l'instant de côté ces considérations générales pour nous occuper particulièrement de la méthode de sommation exponentielle. Nous allons d'ailleurs la transformer et mettre l'expression analytique de la somme sous forme intégrale, sans laisser trace de moyennes.

La méthode de sommation exponentielle (forme intégrale) [1].

45. Nous avons dit que la méthode de sommation exponentielle est un cas particulier de la sommation par les fonctions entières, obtenu en posant

$$\varphi(a) = e^{a}.$$

On est ainsi conduit à appeler *limite généralisée* S de la suite des sommes partielles S_n d'une série Σu_n, l'expression

$$\text{(1)} \qquad S = \lim_{a=\infty} e^{-a} s(a),$$

en posant

$$\text{(2)} \qquad s(a) = S_0 + S_1 \frac{a}{1} + S_2 \frac{a^2}{1.2} + S_3 \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots,$$

cette définition étant considérée comme valable toutes les fois que, la fonction $s(a)$ étant entière, l'expression $e^{-a}s(a)$ possède une limite.

Nous allons maintenant montrer comment on peut, dans des cas étendus, substituer à la méthode originelle de la sommation exponentielle une autre méthode très proche parente, bien que distincte. Elle consistera à prendre pour définition de la somme une intégrale de la forme

$$\text{(3)} \qquad \sigma = \int_0^{\infty} e^{-a} u(a)\, da,$$

en posant

$$\text{(4)} \qquad u(a) = u_0 + \frac{u_1 a}{1} + \frac{u_2 a^2}{1.2} + \frac{u_3 a^3}{1.2.3} + \ldots,$$

chaque fois que, en vertu de (4), le second membre de la formule (3) a un sens. Conformément aux usages admis, nous le désignerons sous le nom d'*intégrale de Borel*.

Observons que, si la fonction $s(a)$ est entière, il en est de

[1] La rédaction de ces questions a été perfectionnée à la lumière des travaux de M. G. Sannia (*Rendic. di Palermo*, t. 42, 1917).

même de $u(a)$. Car on a identiquement

$$\begin{aligned}
u(a) &= u_0 + \frac{(S_1 - S_0)a}{1} + \frac{(S_2 - S_1)a^2}{1.2} + \frac{(S_3 - S_2)a^3}{1.2.3} + \dots \\
&= u_0 + \int_0^a \left[(S_1 - S_0) + \frac{(S_2 - S_1)a}{1} + \frac{(S_3 - S_2)a^2}{1.2} + \dots \right] da \\
&= u_0 + \int_0^a [s'(a) - s(a)]\, da \\
&= s(a) - \int_0^a s(a)\, da.
\end{aligned}$$

On dit que $u(a)$ est *la fonction entière associée* à la série proposée $\sum_0^\infty u_n$. On peut encore écrire

$$u(a) = u_0 + \int_0^a u(a)\, da,$$

en posant

$$u'(a) = s'(a) - s(a) = u_1 + \frac{u_2 a}{1} + \frac{u_3 a^2}{1.2} + \dots .$$

D'après cela, notons que la fonction entière, associée à la série $\sum_1^\infty u_n$, n'est autre que la dérivée $u'(a)$ de $u(a)$; de même la fonction entière, associée à la série $\sum_\lambda^\infty u_n$, est la dérivée $u^{(\lambda)}(a)$.

46. Démontrons encore un lemme qui nous sera utile. *Supposons que l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-a} f'(a)\, da$$

ait un sens. Alors, nous allons prouver qu'*il en sera de même de l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-a} f(a)\, da,$$

et en outre que *le produit*

$$e^{-a} f(a)$$

tend vers zéro. Nous aurons en effet

$$\int_0^L e^{-a} f'(a)\,da = e^{-L} f(L) - f(0) + \int_0^L e^{-a} f(a)\,da,$$

en posant

$$\int_0^L e^{-a} f(a)\,da = \varphi(L),$$

d'où

$$e^{-L} f(L) = \varphi'(L),$$

nous aurons

$$\varphi(L) + \varphi'(L) = f(0) + g(L),$$

où $g(L)$ tend vers une limite bien déterminée g. Or, d'après un lemme précédemment établi (n° 22, p. 52), toute intégrale de cette équation différentielle [laquelle définit justement $\varphi(L)$] tend précisément vers $f(0)+g$ quand L croît indéfiniment. Le résultat annoncé en découle immédiatement.

En vertu de ce lemme, nous pouvons donc écrire légitimement

$$\int_0^\infty e^{-a} f'(a)\,da = \int_0^\infty e^{-a} f(a)\,da - f(0);$$

notamment, en posant $f(a) = u(a)$, nous aurons

$$\int_0^\infty e^{-a} u'(a)\,da = \int_0^\infty e^{-a} u(a)\,da - u_0.$$

47. De ces préliminaires, résulte le théorème suivant :

Chaque fois que, la fonction $s(a)$ étant entière, le produit $e^{-a} s(a)$ tend vers une limite S, *l'intégrale*

$$\int_0^L e^{-a} u(a)\,da$$

tend aussi vers S *lorsque* L *tend vers* $+\infty$.

Autrement dit, de la sommabilité exponentielle (méthode des fonctions entières) découle la sommabilité analogue, sous forme intégrale.

En effet, nous pouvons écrire en posant $[f]_\alpha^\beta = f(\beta) - f(\alpha)$

$$S - u_0 = [e^{-a} s(a)]_0^\infty = \int_0^\infty \frac{d}{da}[e^{-a} s(a)]\,da = \int_0^\infty e^{-a} u'(a)\,da,$$

d'où, en vertu du lemme précédent,

$$S - u_0 = \int_0^\infty e^{-a}\, u(a)\, da - u_0;$$

en supprimant le terme u_0, commun aux deux membres, on a bien le résultat annoncé.

48. Mais la réciproque n'est pas exacte en général. Il peut parfaitement se faire que l'intégrale

$$\int_0^L e^{-a}\, u(a)\, da$$

tende vers une limite, sans pour cela qu'il en soit de même du produit $e^{-a} s(a)$.

Toutefois, le théorème redevient exact et il y a bien égalité des deux limites lorsqu'on suppose remplie la condition

$$\lim_{a=\infty} e^{-a}\, u(a) = 0.$$

En effet, reprenons l'identité

$$\int_0^L e^{-a}\, u(a)\, da = - e^{-L} u(L) + u_0 + \int_0^L e^{-a}\, u'(a)\, da;$$

en faisant croître L indéfiniment, l'intégrale du second membre aura bien une limite en vertu de nos hypothèses et nous aurons par suite

$$\int_0^\infty e^{-a}\, u(a)\, da = u_0 + \int_0^\infty e^{-a}\, u'(a)\, da$$

ou, en remarquant encore que $u'(a) = s'(a) - s(a)$,

$$\int_0^\infty e^{-a}\, u(a)\, da = u_0 + \int_0^\infty \frac{d}{da}[e^{-a} s(a)]\, da.$$

Il est donc établi :

1° Que l'intégrale du second membre a un sens;

2° Que le produit $e^{-a} s(a)$ tend bien vers une limite égale à l'intégrale du premier membre.

48 *bis*. Voici une conséquence des résultats précédents :

Si la série $\sum_1^\infty u_n$ *est sommable par l'intégrale de Borel, et a pour somme* S_1, *la série* $\sum_0^\infty u_n$ *est également sommable par cette méthode et a pour somme*

$$S = u_0 + S_1.$$

Mais la sommabilité de $\sum_0^\infty u_n$ *par l'intégrale de Borel n'entraîne pas celle de* $\sum_1^\infty u_n$.

En effet, dire que la série $\sum_1^\infty u_n$ est sommable signifie ici que, en posant

$$u'(a) = u_1 + \frac{u_2 a}{1} + \frac{u_3 a^2}{1.2} + \frac{u_4 a^3}{1.2.3} + \ldots,$$

l'intégrale

$$\int_0^L e^{-a} u'(a)\, da$$

tend vers une limite S_1 pour L infini. De l'existence de cette limite résulte aussi l'existence d'une limite (en vertu du lemme) pour l'intégrale

$$\int_0^L e^{-a} u(a)\, da,$$

et l'on peut écrire

$$\int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da = u_0 + \int_0^\infty e^{-a} u'(a)\, da,$$

c'est-à-dire précisément

$$S = u_0 + S_1.$$

Mais nous avons vu que la réciproque n'a pas toujours lieu : la sommation par l'intégrale de Borel ne jouit donc pas du caractère semi-associatif, considéré dans l'Introduction (n° 10).

49. M. G. Sannia (*loc. cit.*) généralise les propositions précé-

dentes en faisant intervenir simultanément les deux suites de fonctions

$$u(a),\quad u'(a),\quad u''(a),\quad \ldots,\quad u^{(\lambda)}(a),\quad \ldots,$$
$$s(a),\quad s'(a),\quad s''(a),\quad \ldots,\quad s^{(\lambda)}(a),\quad \ldots,$$

dans chacune desquelles le terme général représente une dérivée d'ordre λ. Si une fonction de l'une de ces suites est entière, toutes les autres le sont, de ce fait. Cela posé, chaque fois que

$$e^{-a}s^{(r-1)}(a)$$

tend vers une limite (pour $a = +\infty$), on en déduit par le raisonnement du n° 47, dans lequel on remplace seulement $s(a)$ par $s^{(r-1)}(a)$, ce qui change $u'(a)$ en $u^{(r)}(a)$, que l'intégrale

$$\mathrm{I}_r = \int_0^{\infty} e^{-a}\, u^{(r)}(a)\, da$$

a une limite : ce qui entraîne la même propriété pour I_{r-1}, I_{r-2}, ..., I_0. Lorsqu'il en est ainsi, on dit que la série proposée est sommable (B, r); si l'intégrale I_{r-1} est convergente, il ne s'ensuit pas nécessairement que $e^{-a}s^{(r-1)}(a)$ ait une limite : il n'y a donc pas forcément sommabilité (B, r). Pour que cela subsiste, il faut et il suffit (raisonnement du n° 48) que

$$\lim_{a=\infty} e^{-a}\, u^{(r)}(a) = 0.$$

Mais la convergence de I_{r-1} entraîne toujours la sommabilité (B, $r-1$). La sommabilité (B, 1) n'est autre que la sommabilité exponentielle sous sa forme originelle (méthode des fonctions entières); la méthode de l'intégrale de Borel correspond à la sommabilité (B, 0).

Grâce à cette terminologie, les résultats précédents peuvent se résumer ainsi :

1° Toute série sommable (B, r) est sommable (B, $r-1$) avec une somme égale, mais la réciproque n'a lieu que sous la condition

$$\lim_{a=\infty} e^{-a}\, u^{(r-1)}(a) = 0.$$

2° Si $\sum_0^{\infty} u_n$ est sommable (B, r), on peut dire seulement que la

série $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ est sommable (B, $r-1$) et plus généralement que $\sum\limits_{k}^{\infty} u_n$ est sommable (B, $r-k$). On a, entre les sommes (B, $r-k$) des deux séries, la relation

$$\sum_{0}^{\infty} u_n - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{k-1}) = \sum_{k}^{\infty} u_n.$$

50. Lorsqu'il sera question de sommabilité, nous entendrons nous référer à l'intégrale de Borel (jusqu'à nouvel ordre).

Nous venons de voir, par ce qui précède, que l'étude des séries simplement sommables offre des difficultés : certaines d'entre elles sont analogues à celles qu'on rencontre à propos des séries qui sont convergentes, sans l'être absolument. Aussi, nous occuperons-nous exclusivement des séries *absolument sommables*, que nous allons maintenant définir.

Nous dirons que la série $\sum\limits_{0}^{\infty} u_n$ *est absolument sommable si toutes les intégrales*

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-a} \,|\, u(a) \,|\, da, \\ \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-a} \,|\, u'(a) \,|\, da, \quad \ldots, \quad \int_0^{\infty} e^{-a} \,|\, u^{(\lambda)}(a) \,|\, da, \quad \ldots \end{cases}$$

sont convergentes, quel que soit l'indice de dérivation λ.

Notons encore qu'on peut étendre les définitions précédemment données au cas où la fonction $u(a)$, sans être entière, est susceptible d'un prolongement analytique, défini tout le long de l'axe réel et ne presentant sur cet axe aucun point singulier.

Dès lors, notre série sera dite *sommable, si les intégrales de la suite précédente ont un sens, lorsque* $u(a)$, $u'(a)$, ..., $u^{(\lambda)}(a)$, ... *y représentent, non plus la série,*

$$(2)\qquad u_0 + u_1 \frac{a}{1} + u_2 \frac{a^2}{1.2} + \ldots$$

et ses dérivées, mais la fonction analytique définie par cette série et les dérivées de cette fonction ([1]). Néanmoins, pour simplifier, nous supposerons le plus souvent que $u(a)$ est une fonction entière, omettant l'extension des propositions au cas plus général que nous venons de signaler.

Nous allons maintenant étudier les propriétés des séries absolument sommables. Nous nous occuperons d'abord des séries dont les termes sont des constantes, puis des séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable.

51. Considérons une série convergente à termes tous positifs Σu_n. Alors les fonctions $u(a)$, $u'(a)$, ... sont des fonctions entières à coefficients positifs. Comme la sommation par les fonctions entières est un procédé de sommation régulier, le produit $e^{-a}s(a)$ tend vers la somme (au sens ordinaire) de notre série; pour la même raison, en est-il de même de tous les produits

$$e^{-a}\, s'(a), \quad e^{-a}\, s''(a), \quad \ldots ?$$

Mais, d'après le théorème du n° 47, toutes les intégrales telles que

$$\int_0^\infty e^{-a}\, u(a)\, da, \quad \int_0^\infty e^{-a}\, u'(a)\, da, \quad \int_0^\infty e^{-a}\, u''(a)\, da, \quad \ldots$$

sont convergentes et ont pour limites respectives S, $S - u_0$, $S - u_0 - u_1$, ..., S désignant la somme de la série proposée. Il s'ensuit donc qu'une série convergente à termes positifs est absolument sommable.

De ce résultat et de l'inégalité : (module d'une somme) $<$ (somme des modules), on tire aisément le suivant :

Toute série absolument convergente est absolument sommable.

([1]) Il est nécessaire de supposer que la série (2) a un rayon de convergence différent de zéro. On pourrait chercher à étendre la théorie au cas où cette série a un rayon de convergence nul, mais est *sommable* et définit une fonction analytique sur l'axe réel; on aurait ainsi deux applications superposées de la méthode de sommation. Mais nous laisserons ce point de côté, ainsi que l'étude du cas où la fonction analytique $u(a)$ admet des points singuliers sur l'axe réel, mais peut être prolongée à l'infini dans d'autres directions.

Mais comme l'a prouvé M. G. Hardy par un exemple (¹) cela ne s'applique pas aux séries simplement convergentes.

Notons encore qu'en cas de sommabilité absolue de la série $\sum_0^\infty u_n$, on peut affirmer la sommabilité absolue de toutes les séries $\sum_1^\infty u_n$, $\sum_2^\infty u_n$, ... et l'on a bien par exemple

$$\sum_0^\infty u_n = u_0 + \sum_1^\infty u_n.$$

Cela résulte *a fortiori* de ce que nous avons vu au n° 49.

De là découle qu'*on peut, dans une série absolument sommable, intervertir le rang d'un nombre limité de termes, ou remplacer un certain nombre de termes consécutifs par leur somme, ou remplacer un terme par une somme de plusieurs autres sans altérer ni la sommabilité, ni la somme de la série.* Il est essentiel de remarquer que les opérations précédentes pourraient ne plus être légitimes, *si elles étaient répétées une infinité de fois.*

Une autre propriété, très immédiate, des séries absolument sommables, est la suivante :

Si les séries

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$
$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$$

sont absolument sommables et ont pour sommes u, v, w, et si l'on pose

$$x_n = a u_n + b v_n + c w_n \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

(¹) On prend la série ayant pour terme général $\frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ lorsque $\sqrt{n}$ est entier, et zéro pour les valeurs de n qui ne sont pas des carrés parfaits. On vérifie qu'alors l'intégrale $\int_0^\infty e^{-a} | u(a) | da$ n'a pas de sens.

la série

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

est absolument sommable et a pour somme

$$x = au + bv + cw.$$

32. Une proposition analogue peut être énoncée pour la multiplication :

Si les séries

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

sont absolument sommables et si l'on pose

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0,$$

la série

$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$$

est absolument sommable et a pour somme

$$w = uv.$$

Pour démontrer cette proposition, nous poserons

$$u(a) = u_0 + \frac{u_1 a}{1} + \frac{u_2 a^2}{1.2} + \ldots,$$

$$v(b) = v_0 + \frac{v_1 b}{1} + \frac{v_2 b^2}{1.2} + \ldots$$

et nous aurons

$$u = \int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da,$$

$$v = \int_0^\infty e^{-b} v(b)\, db.$$

Il en résulte

$$uv = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a-b} u(a) v(b)\, da\, db.$$

La transformation en intégrale double du produit des deux intégrales est d'ailleurs légitime, puisque, les séries étant supposées absolument sommables, ces intégrales conservent un sens lorsqu'on y remplace chaque élément par son module.

Nous transformerons l'expression du produit uv en posant

$$a + b = x,$$
$$a - b = y.$$

Il vient alors

$$uv = \int_0^\infty \left[\int_{-x}^{+x} u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right) \frac{dy}{2} \right] e^{-x}\, dx.$$

Nous poserons

$$\varpi(x) = \int_{-x}^{+x} u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right) \frac{dy}{2}$$

et nous aurons

$$uv = \int_0^\infty e^{-x}\, \varpi(x)\, dx,$$

cette intégrale ayant certainement un sens, puisque l'intégrale double en avait un. De plus, nous avons remarqué que l'intégrale double conservait un sens lorsqu'on y remplaçait chaque élément par son module ; il en résulte que *l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-x}\, |\varpi(x)|\, dx$$

a un sens.

Calculons l'expression de $\varpi(x)$; on a

$$u\left(\frac{x+y}{2}\right) = u_0 + u_1 \frac{x+y}{2.1} + u_2 \frac{(x+y)^2}{2^2.1.2} + u_3 \frac{(x+y)^3}{2^3.1.2.3} + \ldots,$$

$$v\left(\frac{x-y}{2}\right) = v_0 + v_1 \frac{x-y}{2.1} + v_2 \frac{(x-y)^2}{2^2.1.2} + v_3 \frac{(x+y)^3}{2^3.1.2.3}.$$

On en conclut

$$u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_p v_q \frac{(x+y)^p (x-y)^q}{2^{p+q}\, p!\, q!}.$$

Or, il est aisé de calculer l'intégrale

$$\int_{-x}^{+x} (x+y)^p (x-y)^q\, dy.$$

En effet, l'intégration par parties donne

$$\int_{-x}^{+x} (x+y)^p (x-y)^q\, dy = \left[\frac{(x+y)^{p+1} (x-y)^q}{p+1} \right]_{-x}^{+x} + \frac{q}{p+1} \int_{-x}^{+x} (x+y)^{p+1} (x-y)^{q-1}\, dy.$$

La partie tout intégrée s'annule aux deux limites, et en répétant

la même opération, on obtient finalement

$$\int_{-x}^{+x} (x+y)^p (x-y)^q \, dy = \frac{q(q-1)\dots 1}{(p+1)\dots(p+q)} \int_{-x}^{+x} (x+y)^{p+q} \, dy,$$

c'est-à-dire

$$\int_{-x}^{+x} (x+y)^p (x-y)^q \, dy = \frac{q(q-1)\dots 1}{(p+1)\dots(p+q)(p+q+1)} (2x)^{p+q+1}.$$

Cette expression est d'ailleurs symétrique en p et q; elle peut en effet s'écrire

$$\frac{p!\, q!}{(p+q+1)!} (2x)^{p+q+1}.$$

Or, on a

$$w(x) = \int_{-x}^{+x} u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right) \frac{dy}{2},$$

on en conclut

$$w(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_p v_q \frac{1}{2^{p+q}\, p!\, q!} \, \frac{p!\, q!}{(p+q+1)!} (2x)^{p+q+1} \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$w(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_p v_q \frac{x^{p+q+1}}{(p+q+1)!},$$

ce qui peut s'écrire

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

en posant

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0.$$

Cette fonction $w(x)$ n'est pas précisément la fonction entière associée à la série w, elle est associée à la série

$$(\alpha) \qquad 0 + w_0 + w_1 + \dots.$$

Or, comme nous ne savons pas si cette série est *absolument* sommable, nous ne pouvons affirmer que la série w est sommable en même temps qu'elle, ni que sa somme est la même, dans le cas où elle serait sommable. En effet, nous avons seulement prouvé que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |w(x)| \, dx$$

a un sens, mais nous ne savons rien sur les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-x} \mid w^{(\lambda)}(x) \mid \qquad (\lambda \geqq 1).$$

Il est d'ailleurs naturel que nous n'ayons pu démontrer encore complètement notre théorème, car nous ne nous sommes pas servis du fait que les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a} \mid u^{(\lambda)}(a) \mid da,$$
$$\int_0^\infty e^{-a} \mid v^{(\lambda)}(a) \mid da$$

ont un sens, pour $\lambda \geqq 1$.

Pour arriver à la démonstration complète, nous remarquerons que, si l'on multiplie les deux séries absolument sommables

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

on obtient la série

$$u_1 v_0 + (u_2 v_0 + u_1 v_1) + (u_3 v_0 + u_2 v_1 + u_1 v_2) + \ldots.$$

Désignons par $\theta(x)$ la fonction entière qui est dans la même relation avec cette série que la série $w(x)$ avec la série w; nous pourrons appliquer à la série $\theta(x)$ les propositions démontrées pour la série $w(x)$.

Or, on a

$$\theta(x) = (w_1 - u_0 v_1)\frac{x}{1} + (w_2 - u_0 v_2)\frac{x^2}{1.2} + (w_3 - u_0 v_3)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\theta(x) = w'(x) - u_0 v(x).$$

Nous venons de dire que cette série $\theta(x)$ est telle que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} \mid \theta(x) \mid dx$$

a un sens; comme il en est de même de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} \mid v(x) \mid dx,$$

on peut affirmer qu'il en est aussi de même de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x}\,|\,w'(x)\,|\,dx.$$

On démontrerait, de la même manière, en considérant le produit des deux séries

$$u_2 + u_3 + u_4 + \ldots,$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots,$$

que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x}\,|\,w''(x)\,|\,dx$$

a un sens, et, plus généralement, qu'il en est de même de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x}\,|\,w^{(\lambda)}(x)\,|\,dx.$$

La série (α) *est donc absolument sommable et notre proposition est complètement démontrée.*

53. Nous avons ainsi reconnu la possibilité d'effectuer sur les séries absolument sommables les deux opérations simples : *addition* (qui comprend la soustraction) et *multiplication*. Il est inutile d'insister sur l'importance de ces propositions dans les applications. Il en résulte, en effet, que :

Si l'on a un polynome (*à coefficients numériques*)

$$P(u, v, w)$$

et que l'on y remplace u, v, w *par des séries absolument sommables, on obtient une série absolument sommable, dont la somme est précisément égale à la valeur numérique que prendrait le polynome, si l'on y remplaçait* u, v, w *par les sommes des séries correspondantes.*

54. Laissant maintenant de côté les séries numériques, nous allons nous occuper des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable. Soit

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

une telle série; supposons qu'elle soit absolument sommable pour une valeur déterminée de z, $z = z_0$, réelle ou imaginaire. Nous allons montrer que *la série est absolument sommable sur le segment* OM, si l'on désigne par O le point $z = 0$ et par M le point $z = z_0$. De plus, *la somme de cette série sur* OM *est une fonction analytique, qui n'a pas de point singulier dans le cercle décrit sur* OM *comme diamètre* (mais nous ne savons pas si la série est sommable en tous les points intérieurs à ce cercle; nous verrons même, au Chapitre suivant, que, dans des cas étendus, il n'en est pas ainsi : n° 64).

Pour démontrer la proposition précédente, qui peut être considérée comme la généralisation du théorème fondamental d'Abel sur les séries entières, formons la fonction entière associée à $\varphi(z)$; c'est la fonction

$$\theta(a, z) = u_0 + \frac{u_1 z a}{1} + \frac{u_2 z^2 a^2}{1.2} + \frac{u_3 z^3 a^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Cette fonction ne dépend que du produit az; nous poserons

$$\theta(a, z) = \mathrm{F}(az).$$

Dire que la série $\varphi(z)$ est absolument sommable pour $z = z_0$, c'est dire que les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a} \left| \frac{d^\lambda}{da^\lambda} \theta(a, z_0) \right| da \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

ont toutes un sens. Or, on peut remplacer ces intégrales par les suivantes

$$\int_0^\infty e^{-a} \,|\, \mathrm{F}^{(\lambda)}(a z_0) \,|\, da \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

car on a

$$\frac{d^\lambda}{da^\lambda} \theta(a, z_0) = z_0^\lambda \, \mathrm{F}^{(\lambda)}(a z_0),$$

et la présence du facteur constant z_0^λ est sans importance.

Posons

$$z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0};$$

les intégrales deviennent

$$\int_0^\infty e^{-a} \,|\, \mathrm{F}^{(\lambda)}(a \rho_0 e^{i\theta_0}) \,|\, da,$$

et, en posant

$$a\rho_0 = b,$$

on obtient

$$\frac{1}{\rho_0}\int_0^\infty e^{-\frac{b}{\rho_0}} | F^{(\lambda)}(b e^{i\theta_0}) | \, db;$$

le chemin d'intégration n'a pas changé puisque ρ_0 est réel et positif.

Considérons maintenant un point z situé sur le segment OM; on a

$$z = \rho e^{i\theta_0},$$

$$0 < \rho < \rho_0.$$

Pour démontrer que la série $\varphi(z)$ est sommable, il suffit de démontrer que les intégrales

$$\frac{1}{\rho}\int_0^\infty e^{-\frac{b}{\rho}} | F^{(\lambda)}(b e^{i\theta_0}) | \, db \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

ont un sens; car nous pouvons faire la même transformation qu'il y a un instant.

Or, ces intégrales ne diffèrent des intégrales relatives à z_0 qu'en un seul point : le facteur $e^{-\frac{b}{\rho_0}}$ est remplacé par le facteur *plus petit* $e^{-\frac{b}{\rho}}$; comme les éléments des intégrales sont positifs, les secondes intégrales ont évidemment un sens lorsque les premières en ont un.

La première partie de notre proposition est donc démontrée.

Pour démontrer la seconde partie, considérons l'expression

$$\psi(z') = \frac{1}{z'}\int_0^\infty e^{-\frac{b}{z'}} F(b e^{i\theta_0}) \, db.$$

D'après ce qui précède, cette intégrale a un sens pour z' réel et $\leq \rho_0$; il est évident qu'elle a aussi un sens lorsque z est imaginaire, à condition que le module du facteur $e^{-\frac{b}{z'}}$ soit inférieur au module du facteur $e^{-\frac{b}{\rho_0}}$. Il est nécessaire et suffisant pour cela que l'on ait

$$\text{partie réelle de } \frac{b}{z'} \geq \frac{b}{\rho_0}.$$

Or, on voit très aisément que, si l'on pose

$$z = z' e^{i\theta_0},$$

la condition (1) entraîne que le point représentatif de z est à l'intérieur du cercle C décrit sur OM comme diamètre. Si donc on définit la fonction $\Psi(z)$ par la relation

$$\psi(z') = \Psi(z),$$

cette fonction $\Psi(z)$ est holomorphe à *l'intérieur* du cercle C, elle coïncide d'ailleurs visiblement sur le segment OM avec la somme de la série sommable $\varphi(z)$; notre proposition est donc complètement démontrée.

55. Il n'est pas inutile d'observer que cette proposition ne suppose nullement l'existence d'un rayon de convergence pour la série de Taylor $\varphi(z)$, cette série peut être divergente quel que soit z. Dans ce cas, la fonction $\Psi(z)$ admet nécessairement le point $z = 0$ comme point singulier; en effet, lorsque l'on tend vers O sur le chemin MO, $\Psi(z)$ et ses dérivées successives tendent vers u_0, u_1, u_2, u_3, ... Si donc le point $z = 0$ n'est pas singulier pour $\Psi(z)$ la série $\varphi(z)$ a un rayon de convergence fini et représente $\Psi(z)$ dans son cercle de convergence.

La proposition que nous venons d'énoncer relativement aux dérivées peut paraître évidente; nous allons cependant la démontrer en toute rigueur, à l'occasion d'une proposition plus générale. Nous allons faire voir en effet que, *si la série* $\varphi(z)$ *est absolument sommable au point* M, *non seulement cette série, mais encore toutes ses dérivées sont absolument sommables sur* OM; mais les séries dérivées peuvent ne pas être sommables en M.

On a, en effet,

$$\varphi'(z) = u_1 + 2u_2 z + 3u_3 z^2 + 4u_4 z^3 + \ldots.$$

La fonction entière associée est

$$\varpi(a, z) = u_1 + \frac{2u_2 a z}{1} + \frac{3u_3 a^2 z^2}{1.2} + \frac{4u_4 a^3 z^3}{1.2.3} + \ldots;$$

si l'on pose

$$\varpi(a, z) = G(az),$$

on a

$$G(t) = u_1 + \frac{2u_2 t}{1} + 3\frac{u_3 t^2}{1.2} + \ldots.$$

Nous avions, d'autre part,

$$F(t) = u_0 + \frac{u_1 t}{1} + \frac{u_2 t^2}{1.2} + \frac{u_3 t^3}{1.2.3} + \ldots.$$

On en conclut

$$G(t) = \frac{d}{dt}[t F'(t)].$$

Notre proposition revient à prouver :

1° Que les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a} \,|\, G^{(\lambda)}(az) \,|\, da \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

ont un sens lorsque z est sur OM, étant supposé qu'il en est de même des intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a} \,|\, F^{(\lambda)}(a z_0) \,|\, da;$$

2° Que, si l'on pose,

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-a} F(az)\, da,$$

on a

$$\varphi'(z) = \int_0^\infty e^{-a} G(az)\, da,$$

z étant toujours situé sur OM, le point $M(z = z_0)$ exclu.

Or, on a

$$G^{(\lambda)}(t) = \frac{d^{\lambda+1}}{dt^{\lambda+1}}[tF'(t)] = tF^{(\lambda+2)}(t) + (\lambda+1)F^{(\lambda+1)}(t).$$

Il en résulte

$$\int_0^A e^{-a} \,|\, G^{(\lambda)}(az) \,|\, da \leq \int_0^A a e^{-a} \,|\, z F^{(\lambda+2)}(az) \,|\, da$$
$$+ \int_0^A (\lambda+1) e^{-a} \,|\, F^{(\lambda+1)}(az) \,|\, da.$$

La seconde des intégrales tend, nous le savons, vers une limite lorsque A augmente indéfiniment, lorsque z est sur OM. Quant à

la première, la substitution déjà faite,

$$z = \rho e^{i\theta_0}, \qquad a\rho = b,$$

la transforme en

$$\frac{1}{\rho}\int_0^{\mathrm{B}} be^{-\frac{b}{\rho}} |\,\mathrm{F}^{(\lambda+2)}(be^{i\theta_0})\,|\,db;$$

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{A}}{\rho}.$$

Or, nous savons que l'intégrale

$$\int_0^{\mathrm{B}} e^{-\frac{b}{\rho_0}} |\,\mathrm{F}^{(\lambda+2)}(be^{i\theta_0})\,|\,db$$

tend vers une limite lorsque B croît indéfiniment. Or, ρ étant inférieur [1] à ρ_0, on a évidemment, au moins à partir d'une certaine valeur de b,

$$be^{-\frac{b}{\rho}} < e^{-\frac{b}{\rho_0}}.$$

L'intégrale que nous étudions tend donc aussi vers une limite lorsque B croît indéfiniment; on a donc

$$\int_0^{\mathrm{A}} e^{-a} |\,\mathrm{G}^{(\lambda)}(az)\,|\,da < \mathrm{M},$$

M étant un nombre fixe, indépendant de A; l'intégrale, dont tous les éléments sont positifs, tend donc vers une limite lorsque A croît indéfiniment, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-a} |\,\mathrm{G}^{(\lambda)}(az)\,|\,da$$

a un sens. La première partie de notre proposition est donc démontrée.

Pour démontrer la seconde, remarquons que l'on a

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-a}\,\mathrm{F}(az)\,da.$$

On en conclut

$$\varphi'(z) = \int_0^{\infty} ae^{-a}\,\mathrm{F}'(az)\,da,$$

---

[1] On voit bien ici pourquoi l'on ne peut supposer $\rho = \rho_0$.

ce calcul étant légitime pour z compris entre o et M (M exclu), comme on peut le voir en raisonnant comme à la page précédente.

Il faut montrer que l'expression obtenue pour $\varphi'(z)$ est égale à

$$\int_0^\infty e^{-a}\,G(az)\,da,$$

sachant que l'on a

$$G(t) = \frac{d}{dt}[t\,F'(t)],$$

c'est-à-dire, en remplaçant t par az,

$$G(az) = \frac{d}{d(az)}[az\,F'(az)] = \frac{d}{da}[a\,F'(az)].$$

L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-a}\,G(az)\,da &= \int_0^\infty e^{-a}\frac{d}{da}[a\,F'(az)]\,da\\ &= [e^{-a}a\,F'(az)]_0^\infty + \int_0^\infty ae^{-a}\,F'(az)\,da.\end{aligned}$$

La partie tout intégrée étant nulle, on retrouve bien l'expression de $\varphi'(z)$ et la seconde partie de notre proposition est ainsi démontrée.

56. En combinant les propositions précédentes avec celles que nous avons obtenues sur les séries à termes constants, on est conduit à un théorème important, qui résume les recherches de ce paragraphe; mais quelques remarques préliminaires sont nécessaires.

Étant donnée une série $\varphi(z)$ absolument sommable sur le segment OM, il est clair que, si tous les coefficients de la série sont nuls, sa somme est nulle : elle définit nne fonction analytique qui est identiquement nulle.

Réciproquement, *la fonction analytique définie par $\varphi(z)$ ne peut être identiquement nulle que si tous les coefficients de $\varphi(z)$ sont nuls.* En effet, si la fonction analytique est identiquement nulle, cette fonction et toutes ses dérivées tendent vers zéro lorsque z tend vers zéro suivant le chemin MO; or les valeurs limites de la fonction et de ses dérivées sont précisément les coefficients de $\varphi(z)$; notre remarque est donc justifiée.

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème fondamental.

THÉORÈME. — *Soient u, v, w des séries absolument sommables pour $z = z_0$ (M); soit, d'autre part,*

$$P(u, v, w, u', v', w', \ldots, u^{(\lambda)}, v^{(\lambda)}, w^{(\lambda)}, x)$$

un polynome par rapport à u, v, w et leurs dérivées jusqu'à l'ordre λ, dont les coefficients sont des séries entières en x ayant un rayon de convergence supérieur à $|z_0.|$

Si, dans ce polynome P, l'on remplace u, v, w par les séries correspondantes et si l'on effectue les calculs comme si ces séries étaient convergentes, on obtient une série S qui est absolument sommable sur OM (le point M pouvant être exclu) et qui définit par suite une fonction analytique F régulière à l'intérieur du cercle décrit sur OM comme diamètre. Cette fonction analytique est précisément ce que devient P lorsqu'on y remplace u, v, w non plus par les séries, mais par les fonctions analytiques correspondantes.

D'ailleurs la fonction F est identiquement nulle dans le cas et dans le cas seulement où la série S a tous ses coefficients nuls, c'est-à-dire dans le cas où les séries u, v, w vérifient formellement la relation

$$P(u, v, w, u', \ldots, w^{(\lambda)}, x) = 0;$$

s'il en est ainsi les fonctions analytiques qui correspondent à u, v, w vérifient effectivement cette relation.

57. Ce théorème justifie l'introduction dans les calculs des séries absolument sommables. Il a été établi en supposant que les fonctions associées étaient des fonctions entières. Mais, comme nous l'avons déjà indiqué au n° 50, cette hypothèse est trop restrictive. Considérons par exemple la série entière toujours divergente

$$1 - z + 2!\,z^2 - 3!\,z^3 + \ldots + (-1)^n n!\,z^n + \ldots,$$

la fonction associée est

$$1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + (-1)^n a^n - \ldots = \frac{1}{1+a}.$$

En appliquant le même processus que précédemment, c'est-à-dire en formant l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a} \frac{da}{1+az},$$

nous définissons une fonction analytique qui concorde justement avec la somme donnée précédemment par la méthode de Stieltjes $\left(\text{n}^\circ\ 32\text{; pour revenir aux notations actuelles, changer } z \text{ en } \frac{1}{z}\right)$.

D'une manière plus générale, nous avons ainsi un processus qui, dans des cas étendus, permettra d'attribuer une somme à certaines séries de Taylor

$$(1) \qquad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots,$$

toujours divergentes. Considérons encore la fonction associée, définie en prolongeant la série

$$u(a) = u_0 + \frac{u_1 a}{1} + \frac{u_2 a^2}{1.2} + \ldots + \frac{u_n a^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

à laquelle nous supposons un rayon de convergence fini. Imaginons que cette fonction soit holomorphe dans un certain angle α délimité dans le plan de la variable a, par deux demi-droites issues de l'origine. Le cas que nous avons en vue [1] est celui où, le point z se trouvant dans l'angle α, l'intégrale

$$(2) \qquad f(z) = \int_0^\infty e^{-a} u(az)\, da$$

est absolument convergente, et où il en est de même des intégrales de la forme

$$\int_0^\infty e^{-a} u^{(\lambda)}(az)\, da.$$

Alors $f(z)$ représente une fonction holomorphe de z dans l'angle α : en l'attribuant pour somme à la série (1), nous pourrons étendre sans modification le théorème du n° 56. Observons que malgré la présence, au sommet $z = 0$ de l'angle α, d'une

---

[1] On pourra former autant d'exemples qu'on voudra en partant d'une fonction $u(az)$ d'un type élémentaire, satisfaisant à toutes nos conditions, d'où l'on remontera au moyen de l'intégrale (2) à $f(z)$.

singularité de $f(z)$, cette fonction tend vers u_0, et sa dérivée d'ordre n vers $n!\,u_n$ lorsque z tend vers le sommet de l'angle, en suivant un chemin intérieur à cet angle. Une infinité d'autres fonctions jouissent, comme nous l'avons déjà expliqué, de cette même suite de propriétés limites; mais l'existence d'une représentation analytique du type (2) se révèle, d'après notre analyse, comme un caractère distinctif au sein de cet ensemble. L'extension du théorème du n° 56 souligne justement l'objectivité d'un tel choix.

58. Examinons les relations qui existent entre la méthode de sommation de Stieltjes et la précédente. Considérons une fonction de la forme

$$f(z)=\int_0^\infty \frac{\sigma(u)\,du}{1+uz},$$

et supposons que toutes les intégrales

$$\int_0^\infty \sigma(u)\,du,\quad \int_0^\infty u\,\sigma(u)\,du,\quad \ldots,\quad \int_0^\infty u^n\,\sigma(u)\,du,\quad \ldots$$

soient absolument convergentes.

Nous aurons pour $f(z)$ un développement asymptotique

$$f(z)=\int_0^\infty \sigma(u)\,du - z\int_0^\infty u\,\sigma(u)\,du + z^2\int_0^\infty u^2\,\sigma(u)\,du - \ldots,$$

valable pour tout chemin tendant vers $z=0$ en restant à l'extérieur d'un angle arbitrairement petit ayant pour bissectrice la portion négative de l'axe réel; en outre, toutes les dérivées de $f(z)$ admettront des développements asymptotiques, se déduisant du précédent par dérivation terme à terme. Considérons maintenant la fonction associée, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}F(t) &= \int_0^\infty \sigma(u)\,du - \frac{t}{1}\int_0^\infty u\,\sigma(u)\,du + \frac{t^2}{1.2}\int_0^\infty u^2\sigma(u)\,du - \ldots \\ &= \int_0^\infty e^{-tu}\,\sigma(u)\,du,\end{aligned}$$

la fonction $F(t)$ est holomorphe dans le plan (t) dans la partie de ce plan située à droite de l'axe imaginaire. Pour appliquer la som-

mation de M. Borel, il faut calculer

$$f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-a} \, \mathrm{F}(az) \, da;$$

supposons la partie réelle de z positive. Nous aurons

$$f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-a} \left(\int_0^{\infty} e^{-auz} \sigma(u) \, du \right) da;$$

dans les conditions indiquées, on peut modifier l'ordre des intégrations et écrire

$$f_1(z) = \int_0^{\infty} \sigma(u) \left(\int_0^{\infty} e^{-a(1+uz)} \, da \right) du,$$

et l'on trouve immédiatement ([1])

$$f_1(z) = f(z).$$

Le résultat subsiste pour toute intégrale de Stieltjes

$$\int_0^{\infty} \frac{d\tau(u)}{1 + uz},$$

lorsque l'intégrale

$$\int_0^{\infty} u^n \, d\tau(u)$$

converge absolument quel que soit n.

Pour être complet, il faudrait étudier le cas où les intégrales employées ne convergent pas absolument. En réalité, la question peut être résolue sous une autre forme, par le théorème suivant, dû à M. F. Bernstein ([2]) :

([1]) On peut noter que

$$\mathrm{F}^{(n)}(t) = (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-tu} u^n \sigma(u) \, du,$$

et prouver facilement la convergence absolue des intégrales

$$\int_0^{\infty} e^{-a} \, \mathrm{F}^{(\lambda)}(az) \, da.$$

([2]) *Jahresbericht der deustchen Mathematiker Vereinigung,* 28, 1919, p. 50 à 63.

Si une série

$$c_0 - c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

est telle que la fonction associée ait un rayon de convergence fini et que les déterminants désignés par A_n et B_n (n° 28) soient positifs, cette série est absolument sommable au sens de M. Borel.

39. Indiquons une extension de la sommation de M. Borel, due à M. Le Roy [1]. Soit le développement taylorien à rayon de convergence nul

$$(1) \qquad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots;$$

imaginons qu'on ait mis u_n sous la forme

$$u_n = a_n \int_0^\infty \varphi(x) x^n \, dx,$$

la série $\sum_0^\infty a_n z^n$ ayant un rayon de convergence fini et conduisant par prolongement à une fonction analytique $F(z)$ telle que l'intégrale

$$f(z) = \int_0^\infty \varphi(x) F(zx) \, dx$$

(laquelle équivaut formellement à la série initiale) représente une fonction holomorphe de z lorsque ce point reste à l'intérieur d'un certain angle ayant pour sommet l'origine. Alors, M. Le Roy se propose de définir des cas où l'on peut regarder $f(z)$ comme la somme de la série (1). La méthode de Stieltjes consiste à prendre

$$a_n = (-1)^n, \qquad F(z) = \frac{1}{1+z}.$$

La méthode de M. Borel revient à poser

$$\varphi(x) = e^{-x},$$

ce qui donne

$$u_n = a_n \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx = a_n \Gamma(n+1).$$

[1] *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1900.

M. Le Roy généralise cette dernière méthode de la manière suivante : supposons la série $\Sigma u_n z^n$ complète et étudions le cas où l'on aurait

$$u_n = a_n \Gamma(pn + 1),$$

p désignant un nombre positif et a_n le coefficient de z^n dans le développement taylorien d'une fonction $F(z)$ remplissant les conditions ci-dessous :

1° $F(z)$ est holomorphe pour $z = 0$ et dans un angle ayant son sommet en ce point et s'étendant jusqu'à l'infini ;

2° $F(z)$ se comporte à l'infini de manière que l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(x) F(zx)\, dx$$

et toutes ses dérivées soient absolument et uniformément convergentes.

Alors la fonction $f(z)$ définie par cette intégrale est holomorphe dans l'angle en question.

En outre, le nombre p est attaché à la série des u_n de manière que, ε étant un nombre positif arbitrairement petit, la série

$$\sum \frac{u_n}{\Gamma[n(p-\varepsilon)+1]} z^n$$

ait un rayon de convergence nul, et que par contre la série

$$\sum \frac{u_n}{\Gamma[n(p+\varepsilon)+1]} z^n$$

représente une fonction entière.

Cela posé, nous avons

$$\Gamma(pn+1) = \int_0^\infty u^{pn} e^{-u}\, du = \frac{1}{p}\int_0^\infty x^n e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1}\, dx \qquad (\text{posez } u^p = x).$$

d'où, par un calcul formel,

$$f(z) = \sum_0^\infty u_n z^n = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} F(zx)\, dx;$$

associons à la série divergente la fonction $f(z)$, définie par cette intégrale. Pour $p=1$, on retrouve la sommation de M. Borel.

Pour p positif quelconque, M. Le Roy montre encore que les théorèmes fondamentaux de M. Borel s'appliquent. Une série sommable à l'ordre p, suivant M. Le Roy et vérifiant une équation différentielle algébrique, donne encore une intégrale de cette équation (*loc. cit.*, p. 413 et suivantes).

Applications aux équations différentielles.

60. Le théorème de M. Borel (nº 56) et la généralisation de M. Le Roy (nº 59) nous conduisent à étudier les applications des séries sommables aux équations différentielles. Considérons, pour abréger l'écriture, une équation différentielle unique, algébrique par rapport à y et à ses dérivées, analytique en x

$$f(x;\, y, y', \ldots, y^{(\lambda)}) = 0.$$

Si une série sommable par une des méthodes précédentes vérifie formellement l'équation différentielle, la fonction analytique qu'elle définit est une intégrale de l'équation (¹).

On sait d'ailleurs que les séries vérifiant formellement $f=0$ s'obtiennent par des différentiations successives; on a ainsi le moyen de déterminer, dans des cas étendus, les intégrales des équations différentielles dans le voisinage des points singuliers.

Prenons par exemple l'équation

$$x^2\frac{dy}{dx} = x^2 - y;$$

cherchons à déterminer l'intégrale y qui, pour $x=0$, se réduit aussi à zéro.

En différentiant l'équation proposée, on obtient successive-

(¹) Cet énoncé suppose implicitement que f est une fonction holomorphe de x dans le voisinage de $x=0$; cette hypothèse est nécessaire pour que le calcul formel soit possible. On pourrait étendre les considérations du texte au cas où les coefficients de $y, y', \ldots$ seraient des séries en x, absolument sommables dans une même région.

ment :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=2x,$$

$$x^2\frac{d^3y}{dx^3}+4x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}=2,$$

$$x^2\frac{d^4y}{dx^4}+6x\frac{d^3y}{dx^3}+2.3\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^3y}{dx^3}=0,$$

$$x^2\frac{d^5y}{dx^5}+8x\frac{d^4y}{dx^4}+3.4\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^4y}{dx^4}=0,$$

. . . .

On aperçoit aisément la loi des termes successifs ; si l'on fait

$$x=0,\qquad y_0=0,$$

on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
y'_0 &= 0,\\
y''_0 &= 2,\\
y'''_0 &= -2.3\,y''_0 = -2^2.3,\\
y_0^{(\text{IV})} &= -3.4\,y'''_0 = 2^2.3^2.4,\\
y_0^{(\text{V})} &= -4.5\,y_0^{(\text{IV})} = -2^2.3^2.4^2.5,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Le développement formel de y doit s'écrire

$$y=y_0+\frac{y'_0}{1}x+\frac{y''_0}{1.2}x^2+\frac{y'''_0}{1.2.3}x^3+\ldots;$$

on obtient donc

$$y=x^2-2x^3+2.3x^4-2.3.4x^5+2.3.4.5x^6-\ldots;$$

cette série est divergente quel que soit x.

La fonction associée est

$$F(ax)=\frac{a^2x^2}{2!}-\frac{2a^3x^3}{3!}+\frac{2.3a^4x^4}{4!}-\ldots;$$

on a donc

$$F(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}-\frac{t^5}{5}+\ldots,$$

c'est-à-dire

$$F(t)=t-\log(1+t).$$

Nous sommes ici dans le cas où la fonction associée n'est pas une

fonction entière (n° 57). L'intégrale obtenue par la sommation de M. Borel sera

$$y = \int_0^\infty e^{-a}[ax - \log(1 + ax)]\, da.$$

61. Nous nous contenterons de signaler sans démonstration la proposition suivante (*Mémoires sur les séries divergentes*, p. 100 et suiv.) :

Soit

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$$

une équation différentielle dans laquelle $\varpi(x, y)$ *désigne un polynome ne renfermant pas de terme de degré* 0 *ou* 1. *Si l'on calcule le développement formel de l'intégrale qui correspond aux conditions initiales*

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0, \qquad y'_0 = 0,$$

on obtient une série généralement divergente

$$y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

La série associée

$$\frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \frac{a_4 t^4}{4!} + \ldots$$

a certainement un rayon de convergence différent de zéro.

Il résulte de la proposition précédente que pour l'équation différentielle étudiée, la méthode des séries sommables substitue à l'étude d'un développement partout divergent, l'étude d'un développement de Taylor dont le rayon de convergence n'est pas nul [1]. Dans des cas favorables, on pourra reconnaître que la fonction obtenue en prolongeant ce développement est holomorphe dans certains angles s'étendant à l'infini, et moyennant la convergence, trouver une intégrale par la méthode de M. Borel. Nous verrons au Chapitre suivant le parti qu'on peut espérer tirer, dans

(1) Par cet artifice, la singularité qui existait ainsi au point $x = 0$ se trouve en quelque sorte dispersée dans tout le plan.

cet ordre d'idées, de certains modes explicites de prolongement dus à M. Le Roy.

Des généralisations aux équations différentielles algébriques quelconques ont été indiquées par M. Maillet, dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale* (t. 20, 1903, p. 487 et suiv.). Mais on n'a guère dans cet ordre d'idées de résultats simples, affirmant à l'avance qu'au voisinage d'un point singulier d'espèce déterminée d'une équation même linéaire, telle ou telle méthode de sommation réussira.

En terminant ce Chapitre, observons que nous n'y avons pas fait usage de la théorie du prolongement analytique; nous avons tenu à montrer que la théorie des séries sommables en est indépendante. Il y a cependant entre les deux théories des relations intéressantes dont nous allons maintenant nous occuper.

CHAPITRE IV.

LES SERIES SOMMABLES ET LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

Le polygone de sommabilité.

62. Considérons une série de Taylor

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \ldots$$

dont nous supposerons essentiellement le rayon de convergence *différent de zéro*. Nous supposerons aussi que ce rayon n'est pas infini, le cas où la série ne divergerait pour aucune valeur de z ne pouvant avoir d'intérêt ici.

Soit z_0 une valeur de z pour laquelle la série est divergente ; il est naturel de convenir que la somme de la série

$$u_0 + u_1 z_0 + u_2 z_0^2 + \ldots$$

est égale à $\varphi(z_0)$, en désignant par $\varphi(z_0)$ la valeur au point $z = z_0$ de la fonction analytique définie par la série proposée.

On est ainsi conduit naturellement, par la théorie du prolongement analytique, à une méthode de sommation des séries divergentes ; il est clair, en effet, que si l'on a une série numérique divergente

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

on pourra, en désignant par z_0 une constante quelconque, poser

$$v_n = u_n z_0^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

et il viendra

$$v = u_0 + u_1 z_0 + u_2 z_0^2 + \ldots = \varphi(z_0).$$

Il est manifeste, d'ailleurs, que le résultat obtenu ne dépend pas

de la valeur choisie pour z_0; on peut supposer, par exemple,

$$z_0 = 1.$$

Mais il est clair que la méthode précédente ne peut s'appliquer que si la série $\varphi(z)$ a un rayon de convergence différent de zéro, ce qui revient à dire qu'il existe un nombre M tel que l'on ait, quel que soit n,

$$|v_n| < M^n;$$

il existe donc des séries *absolument sommables* auxquelles ne s'applique pas la méthode du prolongement analytique; parmi ces séries se trouvent, en particulier, les séries divergentes qui vérifient les équations différentielles au voisinage de certains points singuliers. Par contre, il existe, comme nous le verrons, des séries auxquelles s'applique la méthode de prolongement analytique et qui ne sont pas absolument sommables; nous verrons cependant que le remplacement de la fonction sommatrice e^a par e^{a^k}, k étant un entier convenablement choisi, permet de les sommer, dans des cas très étendus (*voyez* n° 69).

63. Il importe ici de faire une remarque essentielle; dans le cas où la fonction analytique $\varphi(z)$ n'est pas uniforme, la théorie précédente conduit à attribuer à la série divergente $\varphi(z_0)$ plusieurs valeurs différentes, ou même une infinité. Il en est de même, d'ailleurs, pour les séries convergentes.

Soit, par exemple,

$$\varphi(z) = \log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots.$$

Pour $z = 1$, il vient

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

D'après la théorie du prolongement analytique, on doit admettre que cette série convergente a pour somme, non seulement la valeur arithmétique de $\log 2$, qui est sa somme arithmétique, mais toutes les valeurs de $\log(1+z)$, pour $z = 1$, c'est-à-dire

$$\log 2 + 2ki\pi,$$

où k est un nombre entier quelconque. Cette convention n'est

d'ailleurs pas plus étrange que la théorie de Cauchy, qui attribue ces mêmes valeurs à l'intégrale définie

$$\int_1^2 \frac{dz}{z},$$

à condition que le chemin d'intégration puisse être convenablement choisi (¹).

Pour plus de netteté, nous éviterons d'attribuer à une série des valeurs multiples; dans ce but nous conviendrons d'entendre par $\varphi(z_0)$ la valeur que l'on obtient lorsque l'on va de z en z_0 en suivant un chemin rectiligne; la série est ainsi définie dans tout le plan, sauf sur le prolongement des droites qui joignent l'origine aux points singuliers (²).

La manière dont se pose le problème des séries divergentes est alors la suivante : *Déterminer la valeur numérique de $\varphi(z_0)$ en fonction des valeurs numériques de ses termes.* La théorie du prolongement analytique fournit d'ailleurs *théoriquement* une méthode pour résoudre cette question; mais cette méthode n'est guère pratiquement applicable. Nous verrons au Chapitre suivant comment Mittag-Leffler en a donné une solution complète des plus élégantes; nous allons étudier ici la solution qui en est fournie par la théorie des séries sommables, solution qui est moins étendue que celle de Mittag-Leffler, mais qui paraît être, en général, plus simple dans les cas où elle est applicable.

64. Dans ce but, nous allons démontrer le théorème suivant : *Si la fonction analytique $\varphi(z)$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle C passant par l'origine, et sur ce cercle, la série $\varphi(z)$ est absolument sommable sur le diamètre du cercle qui passe à l'origine, y compris son extrémité.*

(¹) Il est d'ailleurs aisé de transformer l'intégrale en la série. On a

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{dz}{1+z} = \int_0^1 (1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \ldots)\, dz$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots.$$

(²) La région dans laquelle $\varphi(z)$ est ainsi définie coïncide avec l'*étoile* de Mittag-Leffler.

Nous désignerons par OM le diamètre du cercle C qui passe à l'origine; M est son extrémité; d'autre part, nous remarquerons que, la fonction $f(z)$ n'ayant aucun point singulier sur C, on peut tracer un cercle C' concentrique à C et de rayon plus grand, tel que la fonction n'ait aucun point singulier sur C' ni à son intérieur [1]; nous désignerons par O'M' le diamètre de C' qui coïncide avec OM; O' est voisin de O et M' voisin de M.

La fonction $\varphi(z)$ étant holomorphe à l'intérieur de C' et sur C', les coefficients u_n de son développement en série sont donnés par la formule

$$u_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nous allons, à l'aide de ces valeurs de u_n, former la fonction entière associée à $\varphi(z)$; cette fonction $\theta(a)$ est définie par la formule

$$\theta(a) = u_0 + \frac{u_1 a z}{1} + \frac{u_2 a^2 z^2}{1.2} + \frac{u_3 a^3 z^3}{1.2.3} + \ldots.$$

On a donc, en remplaçant les u_n par leurs valeurs,

$$\theta(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \varphi(x)\left[\frac{1}{x} + \frac{az}{x^2} + \frac{a^2 z^2}{1.2\,x^2} + \frac{a^3 z^3}{1.2.3\,x^3} + \ldots\right] dx,$$

c'est-à-dire

$$\theta(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{\varphi(x)}{x} e^{\frac{az}{x}}\,dx.$$

On obtient ainsi

$$e^{-a}\theta(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{\varphi(x)}{x} e^{a\left(\frac{z}{x}-1\right)}\,dx.$$

Supposons z choisi de telle manière que l'on ait, quel que soit x sur C',

$$\text{partie réelle de } \frac{z}{x} < 1 - \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif; désignons d'ailleurs par M le maximum de $\left|\frac{\varphi(x)}{x}\right|$ sur C', et par R' le rayon de ce cercle; on aura

$$|e^{-a}\theta(a)| < \frac{1}{2\pi}\int_{C'} M e^{-\varepsilon a}\,|dx| = MR'\,e^{-\varepsilon a}.$$

---

[1] C'est une conséquence du fait que tout point limite de points singuliers est singulier, c'est-à-dire que l'ensemble des points singuliers est fermé.

Donc l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a} \, | \, \theta(a) \, | \, da$$

a certainement un sens. On ferait aisément une démonstration analogue pour les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a} \, | \, \theta^{(\lambda)}(a) \, | \, da \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

La série $\varphi(z)$ est donc absolument sommable pour toutes les valeurs de z qui satisfont à la condition

$$(1) \qquad \text{partie réelle de } \frac{z}{x} < 1 - \varepsilon,$$

quel que soit x sur C', ε étant positif.

Il est clair que si, x étant donné, l'on détermine la droite lieu des points tels que l'on ait

$$(2) \qquad \text{partie réelle de } \frac{z}{x} = 1,$$

la condition (1), dans laquelle x a une valeur déterminée, est vérifiée pour tous les points situés d'un certain côté de cette droite et pour ces points seulement.

Il en résulte que, étant donné un point x, le lieu des points z qui satisfont à la condition (1) est formé de la portion du plan située du même côté que l'origine par rapport à la perpendiculaire élevée au point x à la droite qui joint ce point à l'origine. Si l'on effectue cette construction pour tous les points de C', on sait que, le point O étant intérieur à C', l'enveloppe des perpendiculaires qui viennent d'être définies est une ellipse ayant pour grand axe $O'M'$ et pour foyer le point O; cette ellipse est donc d'autant plus aplatie que le cercle C' est plus voisin de C; mais, dans tous les cas, elle renferme à son intérieur le segment OM qui joint ses deux foyers.

Notre proposition est donc démontrée, car il résulte de ce qui précède que la série $\varphi(z)$ est absolument sommable pour tous les points intérieurs à l'ellipse [1].

---

[1] Elle est même absolument sommable pour les points de l'ellipse, car $\varphi(z)$ n'ayant pas de points singuliers sur C', on pourrait remplacer C' par un cercle plus grand C''; l'ellipse est ainsi remplacée par une ellipse homofocale plus grande

Il est d'ailleurs clair que la série $\varphi(z)$ étant absolument sommable à l'intérieur de l'ellipse, sa somme est une fonction analytique régulière dans cette aire [1]; et, comme cette fonction analytique coïncide évidemment avec $\varphi(z)$ dans la partie commune à l'ellipse et au cercle de convergence de $\varphi(z)$, elle est égale à $\varphi(z)$ dans toute l'aire considérée, et en particulier sur le segment OM.

Nous possédons maintenant les éléments nécessaires pour définir exactement le domaine dans lequel la série $\varphi(z)$ est *absolument sommable*. Nous venons de voir en effet que cette série est absolument sommable en un point M, si la fonction analytique $\varphi(z)$ n'admet aucun point singulier à l'intérieur du cercle C décrit sur OM comme diamètre, ni sur ce cercle.

D'autre part, il résulte d'une proposition démontrée au Chapitre précédent (n° 54) que, si la série $\varphi(z)$ est absolument sommable en M, elle est absolument sommable sur OM, et que sa somme définit une fonction analytique n'admettant aucun point singulier à l'intérieur du cercle C, mais pouvant en admettre sur ce cercle [2].

65. On peut réunir les deux propositions précédentes en un seul énoncé en disant que, *pour que la série* $\varphi(z)$ *soit sommable en* M, *il est nécessaire que la fonction analytique* $\varphi(z)$ *n'admette aucun point singulier à l'intérieur de* C, *et suffisant que cette fonction n'admette aucun point singulier, soit à l'intérieur de* C, *soit sur* C.

Ceci posé, désignons par A un point singulier de $\varphi(z)$ et par Δ la perpendiculaire élevée en A à la droite OA; si le point A est

---

(1) Il pourrait y avoir une difficulté, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\theta(a)\,da$$

qui définit la somme, ayant sa limite supérieure infinie. Il suffit d'observer qu'il existe un nombre ε tel que l'on ait, à partir d'une valeur *fixe* de a, quel que soit z intérieur à l'ellipse $e^{-a}|\theta(a)| < e^{-\varepsilon a}$. L'existence de ce nombre ε se démontre aisément en considérant une ellipse homofocale plus grande, comme il est expliqué dans la note précédente. On peut exprimer ce fait en disant que la série est uniformément sommable à l'intérieur de l'ellipse.

(2) D'ailleurs cette fonction analytique, coïncidant avec $\varphi(z)$ sur la portion de MO intérieure au cercle de convergence de la série $\varphi(z)$ est identique à la fonction $\varphi(z)$.

sur C, la droite Δ passe en M; si le point A est intérieur à C, la droite Δ rencontre le segment OM, c'est-à-dire coupe la droite OM entre O et M; si le point A est extérieur à C, la droite Δ ne rencontre pas le segment OM. On peut aussi distinguer ces deux derniers cas en disant que, suivant que A est extérieur ou intérieur à C, les points O et M sont ou ne sont pas du même côté de Δ.

Donc, si A était le seul point singulier de $\varphi(z)$, pour que la série fût absolument sommable en M, *il serait nécessaire que* M *ne soit pas au delà de* Δ *par rapport à* O (M *pouvant être sur* Δ), *et suffisant que M soit en deçà de* Δ *par rapport à* O (*le cas de* M *sur* Δ *étant douteux*).

Dans le cas où il y a un nombre limité de points singuliers, traçons les droites Δ', Δ'', ..., $\Delta^{(k)}$ qui correspondent à chacun d'eux de la même manière que Δ correspond à A. La portion du plan située du même côté que O par rapport à chacune de ces droites constitue ce que nous appellerons le *polygone de sommabilité*.

Dans certains cas, ce polygone peut ne pas être fermé, c'est-à-dire s'étendre jusqu'à l'infini. Nous avons indiqué, dans les figures 11, 12, 13, 14, quelques-uns des cas qui peuvent se pré-

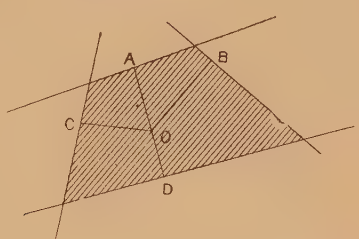

Fig. 11.

senter, en supposant qu'il y ait quatre points singuliers A, B, C, D. Le polygone de sommabilité est couvert de hachures.

Dans le cas où il y a une infinité de points singuliers, il peut fort bien arriver qu'il existe un polygone de sommabilité d'un nombre limité de côtés [1], formé par les droites qui corres-

[1] Il en sera même toujours ainsi dans le cas où, le polygone de sommabilité ne s'étendant pas à l'infini, les points singuliers n'ont aucun point limite à distance finie (c'est-à-dire sont en nombre limité dans toute région finie du plan).

pondent à un nombre limité de points singuliers, les droites correspondant aux autres points singuliers ne rencontrant pas le con-

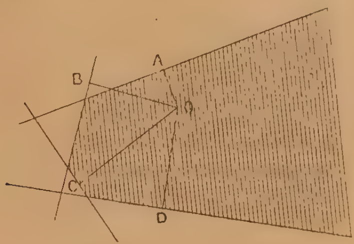

Fig. 12.

tour de ce polygone et ne jouant par suite aucun rôle : il en est ainsi, dans la figure 13, de la droite qui correspond au point D.

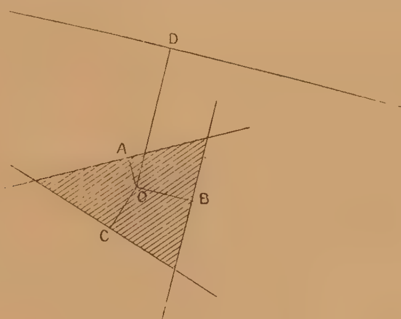

Fig. 13.

Enfin, il peut arriver que les points singuliers n'étant pas en nombre fini, l'ensemble des droites Δ forme un polygone d'une

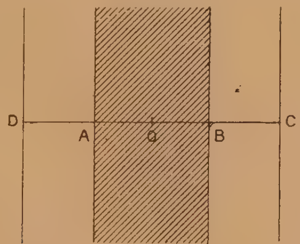

Fig. 14.

infinité de côtés, ou bien qu'une infinité d'entre elles enveloppent une courbe : ce dernier cas se présentera lorsque la fonction

admet une ligne singulière essentielle; seulement, il pourra arriver que la courbe soit en dehors du polygone de sommabilité comme, dans la figure 13, la droite qui correspond à D.

Quoi qu'il en soit, *nous conserverons toujours le nom de* polygone de sommabilité *à l'ensemble des points du plan qui sont, par rapport à toutes les droites* Δ *correspondant aux divers points singuliers, du même côté que le point* O. Ces points A sont dits *intérieurs* au polygone; leurs points limites [1] constituent le *contour* de ce polygone : chacun de ces points limites se trouve sur au moins une droite Δ.

66. Ces définitions posées, on a la proposition suivante :

La série $\varphi(z)$ *est absolument sommable pour les points intérieurs au polygone de sommabilité; elle peut l'être ou non pour les points du contour, elle ne l'est pas pour les autres points du plan, c'est-à-dire pour les points extérieurs au polygone.*

On voit que cette proposition définit d'une manière précise le domaine dans lequel la méthode des séries absolument sommables permet de réaliser le prolongement analytique de $\varphi(z)$; ce domaine peut être plus ou moins étendu, suivant la distribution dans le plan des points singuliers, mais un fait est essentiel dans les applications, comme nous le verrons à la fin de ce Chapitre : *ce domaine dépasse le cercle de convergence en tout point non singulier.* En d'autres termes, soit A un point du cercle de convergence, non singulier pour $\varphi(z)$: *il existe un cercle de centre* A *et tout entier intérieur au polygone de sommabilité.*

Observons, en terminant ce paragraphe que, si l'on se place au point de vue du prolongement analytique, les diverses propositions sur la possibilité d'additionner, de multiplier, de différentier les séries divergentes; de les modifier en ajoutant entre eux, permutant, ou supprimant un nombre limité de termes,

---

(1) Un point limite est un point dans le voisinage duquel se trouve une infinité de points A, c'est-à-dire tel qu'il y ait des points A dans tout cercle de rayon si petit qu'il soit, ayant ce point pour centre. Nous ne comptons pas ici les points A parmi les points limites.

toutes ces propositions dont la démonstration a occupé une grande partie du Chapitre précédent *deviennent évidentes*. Seulement *elles ne s'appliquent qu'aux séries auxquelles correspondent des séries de Taylor $\varphi(z)$ à rayon de convergence différent de zéro;* c'est pourquoi nos démonstrations n'étaient pas inutiles.

Les généralisations simples de la méthode exponentielle.

67. Il résulte de ce qui précède que le polygone de sommabilité relatif à une fonction $\varphi(z)$ est parfois à peine plus étendu que le cercle de convergence. Nous allons montrer comment, en modifiant légèrement la méthode de sommation exponentielle, on peut arriver à sommer une série de Taylor dans une région bien plus étendue.

La modification dont nous voulons parler consiste à employer, comme fonction sommatrice, la fonction e^{a^k}, k étant un entier positif, au lieu de e^a (¹).

On a

$$e^{a^k} = 1 + \frac{a^k}{1} + \frac{a^{2k}}{2!} + \ldots + \frac{a^{nk}}{n!} + \ldots.$$

Si l'on considère la série

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_k z^k + \ldots$$

et si l'on désigne par s_n la somme de ses n premiers termes, on se trouve conduit à chercher la limite vers laquelle tend l'expression

$$\sigma(a) = \frac{s_0 + \dfrac{s_k a^k}{1} + \dfrac{s_{2k} a^{2k}}{2!} + \ldots}{e^{a^k}},$$

lorsque a augmente indéfiniment par valeurs positives.

(¹) M. Borel a signalé l'intérêt qui s'attache à la considération des fonctions sommatrices e^{a^k} dans son Mémoire *Fondements de la théorie des séries divergentes sommables* (*Journal de M. Jordan*, 1896, p. 121); *voir* aussi *Comptes rendus*, 7 avril 1896. Ces indications ont été développées simultanément dans le Mémoire de M. Servant, cité p. 94, et dans le *Mémoire* de M. Borel *sur les séries divergentes*. M. Borel expose ici une méthode permettant de démontrer la sommabilité *absolue*.

Nous poserons $a^k = b$, $\sigma(a) = s(b)$ et il viendra

$$s(b) = e^{-b}\left(s_0 + \frac{s_k b}{1} + \frac{s_{2k} b^2}{2!} + \ldots\right);$$

or on a

$$\lim_{b=\infty} s(b) = s_0 + \int_0^\infty s'(b)\,db = \int_0^\infty e^{-b}\,u(b, z)\,db,$$

en posant

$$u(b, z) = u_0 + u_1 z + \ldots + u_{k-1} z^{k-1} + \frac{b}{1}(u_k z^k + \ldots + u_{2k-1} z^{2k-1})$$
$$+ \frac{b^2}{2!}(u_{2k} z^{2k} + \ldots + u_{3k-1} z^{3k-1}) + \ldots.$$

Il s'agit de déterminer dans quelles régions du plan les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-b}\left|\frac{\partial^\lambda}{\partial b^\lambda} u(b, z)\right| db \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

ont un sens; la série $\varphi(z)$ sera dite *absolument sommable* dans ces régions.

Or, on peut écrire

$$u(b, z) = \varphi_0(b, z) + z\varphi_1(b, z) + z^2\varphi_2(b, z) + \ldots + z^{k-1}\varphi_{k-1}(b, z),$$

en posant

$$\begin{aligned}
\varphi_0(b, z) &= u_0 + \frac{b}{1} u_k z^k + \frac{b^2}{2!} u_{2k} z^{2k} + \ldots,\\
\varphi_1(b, z) &= u_1 + \frac{b}{1} u_{k+1} z^k + \frac{b^2}{2!} u_{2k+1} z^{2k} + \ldots,\\
\varphi_2(b, z) &= u_2 + \frac{b}{1} u_{k+2} z^k + \frac{b^2}{2!} u_{2k+2} z^{2k} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi_{k-1}(b, z) &= u_{k-1} + \frac{b}{1} u_{2k-1} z^k + \frac{b^2}{2!} u_{3k-1} z^{2k} + \ldots.
\end{aligned}$$

D'ailleurs, si l'on pose

$$z^k = y,$$

on remarquera que les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ ne dépendent que de y; on a, par exemple,

$$\varphi_0(b, z) = \psi_0(b, y) = u_0 + \frac{b}{1} u_k y + \frac{b^2}{1.2} u_{2k} y^2 + \ldots.$$

On a, d'autre part,

$$\varphi(z) = \theta_0(y) + z\theta_1(y) + \ldots + z^{k-1}\theta_{k-1}(y),$$

en posant

$$\begin{aligned}
\theta_0(y) &= u_0 + u_k y + u_{2k} y^2 + \ldots,\\
\theta_1(y) &= u_1 + u_{k+1} y + u_{2k+1} y^2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\theta_{k-1}(y) &= u_{k-1} + u_{2k-1} y + u_{3k-1} y^2 + \ldots.
\end{aligned}$$

Si l'on applique à la série $\theta_0(y)$ la méthode de sommation exponentielle, on obtient

$$\theta_0(y) = \int_0^\infty e^{-b}\,\psi_0(b, y)\,db$$

et l'on sait que les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-b}\left|\frac{\partial^\lambda}{\partial b^\lambda}\psi_0(b, y)\right| db$$

ont un sens à l'intérieur du polygone de sommabilité relatif à $\theta_0(y)$ et n'en ont pas à l'extérieur.

Or si l'on désigne par ω une racine primitive de l'équation

$$\omega^k = 1,$$

on a visiblement

$$\theta_0(y) = \varphi(z) + \varphi(\omega z) + \varphi(\omega^2 z) + \ldots + \varphi(\omega^{k-1} z).$$

Les points singuliers de la fonction $\theta_0(y)$ se déterminent donc aisément si l'on connaît les points singuliers de $\varphi(z)$; en désignant par α un point singulier de $\varphi(z)$, la fonction $\theta_0(y)$ admet le point singulier

$$\beta = \alpha^k$$

et l'on obtient ainsi *tous* les points singuliers de $\theta_0(y)$; il en est d'ailleurs de même pour les autres fonctions θ_i; on a, par exemple,

$$\theta_1(y) = \frac{\varphi(z)}{z} + \frac{\varphi(\omega z)}{\omega z} + \ldots + \frac{\varphi(\omega^{k-1} z)}{\omega^{k-1} z}$$

et l'on voit immédiatement que le point singulier $z = 0$, dont on aurait pu craindre l'introduction, est seulement apparent.

Le polygone de sommabilité est donc le même pour toutes les fonctions $\theta_i(y)$; lorsque y est intérieur à ce polygone, toutes les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-b}\left|\frac{\partial^\lambda}{\partial b^\lambda}\psi_i(b, y)\right| db \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1\end{pmatrix}$$

ont un sens. Or on a

$$\varphi(b, z) = \theta_0(b, y) + \ldots + z^{k-1}\theta_{k-1}(b, y).$$

On en conclut que, si y est intérieur au polygone de sommabilité, les intégrales

$$\int_0^{\infty} e^{-b} \left| \frac{\partial^\lambda}{\partial b^\lambda} \varphi(b, z) \right| db$$

ont toutes un sens, ce que nous exprimerons en disant que la fonction $\varphi(z)$ est absolument sommable par l'emploi de e^{a^k}.

68. Il reste à déterminer dans quelle région de son plan se trouve z lorsque y est à l'intérieur du polygone de sommabilité que nous avons défini; il suffit évidemment pour cela de savoir quelle courbe correspond, dans le plan de la variable z, à un côté déterminé de ce polygone.

Nous avons vu que, en désignant par α_1 un point singulier de $\varphi(z)$, le point singulier correspondant des fonctions $\theta_i(y)$ est α_1^k. Si nous posons

$$\alpha_1 = r_1 e^{ia_1},$$

la perpendiculaire élevée au point α^k à la droite qui joint l'origine à ce point, perpendiculaire qui est un des côtés du polygone de sommabilité, aura pour équation, en coordonnées polaires,

$$\rho_1 \cos(\theta_1 - ka_1) = r_1^k, \tag{1}$$

en désignant par ρ_1 et θ_1 les coordonnées courantes, ce qui revient à poser

$$y = \rho_1 e^{i\theta_1}.$$

Si nous posons, d'autre part,

$$z = \rho e^{i\theta},$$

on a visiblement

$$\rho_1 = \rho^k, \qquad \theta_1 = k\theta,$$

et la courbe qui, dans le plan de la variable z, correspond à la droite (1), située dans le plan de la variable y, a pour équation

$$\rho^k \cos k(\theta - a_1) = r_1^k. \tag{2}$$

Telle est la courbe qui limite la région de sommabilité absolue,

lorsqu'on emploie la fonction sommatrice e^{a^k}; on doit y joindre naturellement les courbes analogues, correspondant aux divers points singuliers α_2, α_3, ..., pour obtenir le polygone de sommabilité, ici curviligne ([1]).

La courbe (2) est aisée à construire; elle est formée de k branches hyperboliques égales entre elles, tangentes au cercle

$$\rho = r_1$$

et asymptotes aux droites

$$a_1 + (2m+1)\frac{\pi}{2k} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, 2k-1).$$

Figurons-la, en supposant, pour fixer les idées, $k = 3$; le point α est en A.

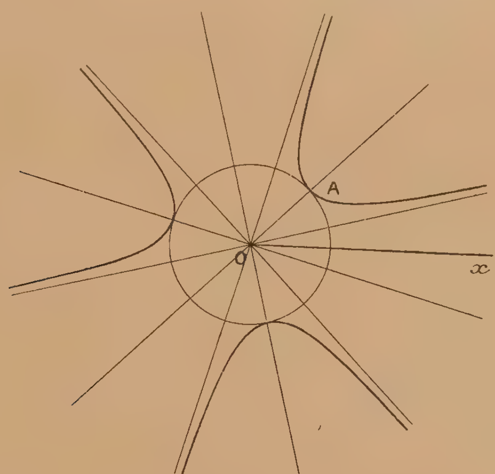

Fig. 15.

Mais le point essentiel pour nous est le suivant : il résulte de l'équation (2) que l'on a

$$\cos k(\theta - a_1) > 0,$$

c'est-à-dire que, m étant un entier convenablement choisi, on

---

([1]) Il résulte simplement de notre démonstration que la série est absolument sommable dans la région du plan située, par rapport à ces diverses courbes, du même côté que l'origine, mais non pas qu'elle *n'est pas* absolument sommable dans l'autre région; mais nous n'aurons pas besoin de ce dernier résultat.

doit avoir

$$2m\pi - \frac{\pi}{2} < k(\theta - a_1) < 2m\pi + \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$a_1 + \frac{(4m-1)\pi}{2k} < \theta < a_1 + \frac{(4m+1)\pi}{2k}.$$

Il ne saurait donc y avoir de points de la courbe dans les angles définis par les relations

$$a_1 + \frac{(4m+1)\pi}{2k} \leqq \theta \leqq a_1 + \frac{(4m+3)\pi}{2k}.$$

Si l'on pose

$$a_1 + \frac{\pi}{2k} = b_1,$$

ces relations deviennent

$$b_1 + \frac{2m}{k}\pi \leqq \theta \leqq b_1 + \frac{2m+1}{k}\pi$$

ou bien

$$(3) \qquad \frac{2m}{k} \leqq \frac{\theta - b_1}{\pi} \leqq \frac{2m+1}{k}.$$

69. Cela posé, considérons une fonction $\varphi(z)$ n'admettant pas une infinité de points singuliers à distance finie, c'est-à-dire telle que, dans un cercle de centre O et de rayon fini, il y ait un nombre limité de points singuliers. Soit, de plus, M un point du plan, *tel que le segment* OM *ne contienne aucun point singulier de* $\varphi(z)$ *et ne fasse, avec aucune des droites qui joignent* O *à ces points singuliers, un angle commensurable avec* π.

Nous allons démontrer que l'on peut choisir le nombre k de telle manière que $\varphi(z)$ soit absolument sommable en M.

Dans ce but, désignons par ρ et θ les coordonnées polaires de M; par hypothèse, $\varphi(z)$ admet à l'intérieur du cercle de rayon ρ un nombre limité de points singuliers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$. Il est d'ailleurs clair que, pour étudier la sommabilité de la série en M, il n'y a pas lieu de se préoccuper des points singuliers extérieurs au cercle de rayon ρ, puisque les courbes correspondantes sont entièrement extérieures à ce cercle. Nous venons de voir que, pour que le point M se trouve dans la région de sommabilité par rapport à la courbe relative au point singulier α_1, il

suffit que l'on ait la relation (3) que nous écrirons

$$\frac{2m}{k} \leq c_1 \leq \frac{2m+1}{k}, \qquad m \text{ entier},$$

en posant

$$c_1 = \frac{\theta - b}{\pi}.$$

On obtiendrait de même des inégalités analogues relatives aux autres points singuliers $\alpha_2, \ldots, \alpha_q$. En posant

$$\left.\begin{aligned} a_\lambda &= r_\lambda e^{i\alpha_\lambda} \\ \alpha_\lambda + \frac{\pi}{2k} &= b_\lambda \\ c_\lambda &= \frac{\theta - b_\lambda}{\pi} \end{aligned}\right\} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, q),$$

ces inégalités s'écriront

$$(4) \qquad \frac{2m_\lambda}{k} \leq c_\lambda \leq \frac{2m_\lambda + 1}{k} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, q),$$

les m_λ étant des nombres entiers.

Il faut montrer qu'il est possible de choisir les nombres k, m_1, m_2, ..., m_λ de manière que ces inégalités soient vérifiées. Or, cette proposition est une conséquence immédiate du théorème suivant, que Kronecker a obtenu en généralisant un théorème d'Hermite : *Étant donnés des nombres incommensurables x_1, x_2, ..., x_q et des nombres quelconques $y_1, y_2, \ldots, y_q$, il est possible de trouver des entiers m_1, m_2, ..., m_q tels que l'on ait*

$$|mx_i - m_i - y_i| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

quel que soit le nombre positif ε donné d'avance.

Ainsi, étant donnée une série de Taylor $\varphi(z)$ à rayon de convergence non nul, *la méthode exponentielle généralisée permet de la sommer en tout point* M *satisfaisant à la condition déjà indiquée, c'est-à-dire en un point aussi voisin que l'on veut d'un point quelconque du plan*, si toutefois on suppose que $\varphi(z)$ n'a qu'un nombre limité de points singuliers dans toute aire finie. Le théorème précédent a quelque analogie avec celui de Mittag-Leffler, dont nous parlerons au prochain Chapitre, mais il est moins parfait en deux points :

1° La valeur du nombre k dépend de la position de M;

2° Cette valeur est difficile à déterminer lorsqu'on connaît seulement la série $\varphi(z)$, bien qu'il soit possible de donner des procédés théoriques pour effectuer cette détermination.

Nous bornerons là notre étude de la méthode exponentielle généralisée, laissant de côté son application à l'étude des fonctions non uniformes autour d'un point singulier, supposé unique sur le cercle de convergence ([1]).

La recherche des points singuliers.

70. Les méthodes précédemment exposées fournissent un moyen, au moins théorique, d'étudier un développement de Taylor $\varphi(z)$, hors de son cercle de convergence. On peut donc chercher à les appliquer à la recherche des points singuliers de $\varphi(z)$.

Les relations entre les points singuliers d'une fonction et son développement de Taylor ont été étudiées pour la première fois par Darboux, dans son Mémoire *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (*Journal de Liouville*, 1878) : les points singuliers étant connus, il s'agissait d'en déduire la valeur principale des coefficients de la série. C'est le point de vue inverse (d'ailleurs étroitement lié au précédent) qui va nous occuper ici.

Le problème de la détermination des points singuliers au moyen des coefficients a été abordé pour la première fois par M. Hadamard, dans sa Thèse ([2]) bien connue et suivie de près par le célèbre Mémoire où il détermina le genre de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et marqua des progrès essentiels en la théorie des fonctions entières ([3]).

Les travaux de M. Hadamard en ont suscité d'autres nombreux et importants, parmi lesquels ceux de M. Fabry ([4]) et ceux de

---

([1]) Voir *Mémoire sur les séries divergentes*, p. 77-78.

([2]) *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor* (*Journal de M. Jordan*, 1892).

([3]) Hadamard, *Sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann* (*Journal de M. Jordan*, 1893). Pour la place que tiennent les travaux de M. Hadamard dans la théorie, on peut consulter les *Leçons sur les fonctions entières* de M. Borel.

([4]) *Annales de l'École Normale*, 1896; *Journal de Mathématiques*, 1898; *Acta mathematica*, t. XXII.

MM. Leau et Le Roy. Un exposé, même sommaire, de la question du prolongement analytique dans son état actuel dépasserait les limites de ce volume et ferait double emploi avec le magistral exposé de M. Hadamard intitulé : *la série de Taylor et son prolongement analytique*, exposé qu'il a récemment mis au courant en collaboration avec M. Mandelbrojt. Aussi développerons-nous surtout les conséquences de la théorie des séries sommables et les travaux qui s'y rattachent : nous nous bornerons à la méthode exponentielle; des considérations analogues s'appliqueraient, *mutatis mutandis*, à ses généralisations.

71. Nous avons vu que si l'on considère une série de Taylor

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots$$

et la fonction entière associée

$$F(az) = u_0 + \frac{u_1 a z}{1} + \frac{u_2 a^2 z^2}{2!} + \ldots,$$

les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a} \,|\, F^{(\lambda)}(az) \,|\, da$$

ont un sens pour les points z intérieurs au polygone de sommabilité et n'en ont pas pour les points extérieurs. D'après le lemme du n° 46, il en résulte que l'élément de chacune d'elles tend vers zéro quand a tend vers $+\infty$. Pour la recherche des points singuliers, il nous suffira de considérer l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a} \,|\, F(az) \,|\, da.$$

Nous venons de dire que la quantité sous le signe somme tend vers zéro. Si l'on pose, comme plus haut,

$$z = \rho e^{i\theta},$$
$$a\rho = b,$$

on pourra dire que le produit

$$e^{-\frac{b}{\rho}} \,|\, F(be^{i\theta}) \,|$$

tend vers zéro lorsque b augmente indéfiniment par valeurs réelles positives (car ρ est réel et positif).

D'autre part, si l'intégrale (1) est dépourvue de sens, on peut affirmer que le produit

$$a^2 e^{-a} |F(az)|$$

ne reste pas fini lorsque a augmente indéfiniment par valeurs réelles positives ([1]); il en est évidemment de même du produit

$$b^2 e^{-\frac{b}{\rho}} |F(be^{i\theta})|;$$

or si le point $z = \rho e^{i\theta}$ est *extérieur* au polygone de sommabilité, il existe certainement un nombre ρ_1 inférieur à ρ tel que le point $z = \rho_1 e^{i\theta}$ soit aussi extérieur à ce polygone; donc le produit

$$b^2 e^{-\frac{b}{\rho_1}} |F(be^{i\theta})|$$

ne reste pas fini quand b augmente indéfiniment par valeurs réelles et positives.

Mais ρ_1 étant inférieur à ρ, il est clair que l'on a, pour les valeurs de b dépassant un nombre déterminé,

$$b^2 e^{-\frac{b}{\rho_1}} < e^{-\frac{b}{\rho}};$$

donc le produit

$$e^{-\frac{b}{\rho}} |F(be^{i\theta})|$$

ne reste pas fini lorsque le point $z = \rho e^{i\theta}$ est extérieur au polygone de sommabilité.

Ces résultats étant établis, donnons à θ une valeur fixe et cherchons à déterminer le point du polygone de sommabilité situé sur la demi-droite dont tous les points ont pour argument θ. Soit ρ_0 la valeur de ρ correspondante. Nous savons que le produit

$$e^{-\frac{b}{\rho}} |F(be^{i\theta})|,$$

lorsque b augmente indéfiniment par valeurs positives, tend vers zéro si l'on a

$$\rho < \rho_0$$

([1]) Il est essentiel d'observer que nous ne pouvons pas affirmer que ce produit *augmente indéfiniment* avec a; il peut prendre des valeurs alternativement grandes et petites; ce qui est certain, c'est qu'il ne pourrait exister de nombre M tel que ce produit soit constamment inférieur à M.

et ne reste pas fini si l'on a

$$\rho > \rho_0.$$

Dans le premier cas, on a, à partir d'une certaine valeur de b,

$$(2) \qquad |F(be^{i\theta})| < e^{\frac{b}{\rho}},$$

tandis que dans le second cas il existe une infinité de valeurs de b croissant indéfiniment pour lesquelles cette inégalité n'est pas vérifiée. Il en est de même de l'inégalité

$$\log|F(be^{i\theta})| < \frac{b}{\rho}:$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad \frac{1}{b}\log|F(be^{i\theta})| < \frac{1}{\rho}$$

Désignons pour un instant, par $\varphi(b)$, le premier membre de l'inégalité (3); lorsque b tend vers $+\infty$, $\varphi(b)$ est constamment inférieur à $\frac{1}{\rho}$ si l'on a $\rho < \rho_0$; au contraire, si l'on a $\rho > \rho_0$, $\varphi(b)$ prend une infinité de valeurs supérieures à $\frac{1}{\rho}$. Donc, il existe une infinité de valeurs de $\varphi(b)$, correspondant à des nombres b croissant indéfiniment et tendant vers $\frac{1}{\rho_0}$; il n'existe pas une telle suite si l'on remplace $\frac{1}{\rho_0}$ par un nombre plus grand, il peut en exister si l'on remplace $\frac{1}{\rho_0}$ par un nombre plus petit. Donc $\frac{1}{\rho_0}$ est la limite supérieure de $\varphi(b)$ pour b infini

$$\frac{1}{\rho_0} = \overline{\lim}\,\frac{1}{b}\log|F(be^{i\theta})|.$$

Ainsi se trouve rigoureusement établie une formule donnée pour la première fois par M. Servant [1] : pour la justifier, nous avons dû établir chemin faisant qu'une série $\varphi(z)$ ne peut être absolument sommable en dehors de son polygone de sommabilité.

72. Cette formule fait connaître un point de contour du poly-

---

[1] *Comparez* la Note adjointe au n° 42.

gone de sommabilité, le point

$$z_0 = \rho_0 e^{i\theta}.$$

On pourra donc, dans les cas où la fonction $F(t)$ sera assez simple pour que la formule soit pratiquement applicable, déterminer le contour du polygone de sommabilité, ce qui fera connaître un certain nombre des points singuliers de la fonction. Si tous les côtés du polygone sont rectilignes, les perpendiculaires abaissées sur ces côtés des polygones feront connaître des points singuliers; s'il y a des côtés curvilignes, leurs courbes podaires sont des lignes singulières essentielles pour $\varphi(z)$.

On voit que la valeur de ρ_0 dépend de la manière dont se comporte la fonction $F(t)$ sur une demi-droite issue de l'origine; lorsque la direction de cette droite varie d'une manière continue, ρ_0 varie aussi d'une manière continue, puisque, d'après la définition du polygone de sommabilité, aucun des côtés de ce polygone ne passe par l'origine. Il serait intéressant de rechercher si cette propriété de continuité, qui appartient aux fonctions entières $F(t)$ associées à une série de Taylor $\varphi(z)$ (à rayon de convergence non nul), appartient aussi à d'autres fonctions entières; on remplacerait au besoin le facteur $\frac{1}{b}$ par $\frac{1}{b^\alpha}$, α étant un nombre quelconque. Une autre question, suggérée par ce résultat, est la suivante : Dans la formule qui donne ρ_0, peut-on remplacer le nombre fixe θ par un nombre θ' qui soit fonction de b et tende vers θ lorsque b augmente indéfiniment? Cela reviendrait à supposer que l'on étudie la fonction $F(t)$ sur une courbe ayant pour direction asymptotique la direction θ, au lieu de l'étudier sur la demi-droite passant par l'origine et parallèle à cette direction; cette hypothèse pourrait être plus commode dans certaines applications.

73. Nous allons indiquer maintenant une proposition qui permet de simplifier le calcul de l'expression

$$\frac{1}{\rho_0} = \overline{\lim} \frac{1}{|t|} \log |F(t)|, \qquad t = be^{i\theta}, \quad \theta \text{ fixe}.$$

Supposons, pour simplifier les calculs, que l'on donne à t la valeur Rn, n étant un entier et R le rayon de convergence de $\varphi(z)$;

nous allons montrer que *la valeur de* ρ_0 *n'est pas modifiée si l'on conserve dans* $F(t)$ *seulement les termes dont le rang est compris entre* $\frac{n}{p}$ *et* $3n$, *le nombre positif* p *étant assujetti simplement à croître indéfiniment avec* n, *suivant une loi d'ailleurs quelconque*. Si, d'ailleurs, au lieu de se proposer de déterminer ρ_0, on se propose simplement de rechercher si un point donné à l'avance est intérieur ou extérieur au polygone de sommabilité, *on pourra prendre pour* p *une valeur fixe* ne dépendant que du rapport entre le module de ce point et le rayon du cercle de convergence de $\varphi(z)$.

Pour démontrer les propositions précédentes, remarquons que si l'on désigne par R le rayon du cercle de convergence de la série

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$

et par R' un nombre inférieur à R, il existe un nombre M tel que l'on ait

$$|u_n| < \frac{M}{R'^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ces inegalités peuvent être remplacées par la formule unique [1]

$$\varphi(z) \ll M\left[1 - \frac{z}{R'} + \left(\frac{z}{R'}\right)^2 - \left(\frac{z}{R'}\right)^3 - \ldots\right].$$

Si nous considérons maintenant la fonction entière associée $F(t)$ nous obtiendrons

$$F(t) \ll M\left[1 + \frac{t}{R'} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t}{R'}\right)^2 + \ldots\right].$$

Nous poserons $t = R'x$, et l'on pourra écrire

$$F(R'x) \ll Me^x.$$

---

[1] Le signe $\ll$, introduit par H. Poincaré, doit toujours séparer deux séries de puissances *dont la seconde est à coefficients positifs*. Il exprime que le module de chaque coefficient de la première série est inférieur au coefficient correspondant de la seconde (*voir* POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I).

La relation $\varphi(z) \ll \psi(z)$ peut s'énoncer : $\varphi(z)$ admet $\psi(z)$ pour fonction majorante.

Il s'agit d'évaluer l'erreur que l'on commet, lorsque, dans le calcul de $F(t)$, pour [1],

$$|t| = |R'x| = R'n,$$

on néglige les termes dont le rang est inférieur à $\frac{n}{p}$ ou supérieur à $3n$; il faut donc calculer la somme de ces termes; le module de cette somme est évidemment inférieur à la somme des termes correspondants du second membre, pour

$$x = n,$$

ces termes étant tous positifs. Or il est aisé de trouver une limite supérieure de cette somme.

Occupons-nous d'abord des termes dont le rang est inférieur ou égal à $\frac{n}{p}$; le plus grand d'entre eux est évidemment celui dont le rang est le plus élevé, c'est-à-dire en supposant, pour éviter les complications de calcul inutiles et sans intérêt, que $\frac{n}{p}$ est un nombre entier

$$\frac{x^{\frac{n}{p}}}{\left(\frac{n}{p}\right)!}$$

ou, pour $x = n$,

$$\frac{n^{\frac{n}{p}}}{\left(\frac{n}{p}\right)!}.$$

Or, la théorie de la fonction Γ nous apprend que l'on a, avec une approximation d'autant plus grande que m est plus grand [2],

$$m! = m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m}.$$

On se rendra aisément compte qu'il est légitime d'employer cette valeur approchée dans les calculs que nous allons faire; on

---

(1) On remarquera que le rapport $\frac{R'}{R}$ peut être supposé aussi voisin de l'unité que l'on veut (il faut le supposer fixe, bien entendu). Dès lors, la substitution R' à R est sans importance.

(2) *Voir* p. 19.

peut même supprimer sans inconvénient le facteur $\sqrt{2\pi m}$, ce qui abrégera l'écriture; en le rétablissant dans toutes les formules, le lecteur verra que sa suppression est sans importance, ce qui légitime, *a fortiori*, la suppression du facteur plus petit qui transformerait la formule d'approximation en formule exacte. Nous allons donc écrire des égalités approchées; pour les transformer en égalités exactes il suffirait de multiplier les seconds membres par $1+\varepsilon_n$, ε_n tendant vers zéro pour n infini. Nous avons ainsi

$$\frac{n^{\frac{n}{p}}}{\left(\frac{n}{p}\right)!} = \frac{n^{\frac{n}{p}}}{\left(\frac{n}{p}\right)^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{n}{p}}} = (ep)^{\frac{n}{p}} = e^{n\frac{1+\log p}{p}}.$$

La somme des $\frac{n}{p}$ premiers termes de la série e^x est donc, pour $x=n$, inférieure au produit par $\frac{n}{p}$ par le terme le plus grand, c'est-à-dire inférieure à

$$\frac{n}{p} e^{n\left(\frac{1+\log p}{p}\right)}.$$

Occupons-nous maintenant des termes dont le rang dépasse $3n$. Le terme de rang $3n$ a pour valeur approchée

$$\frac{n^{3n}}{3n!} = \frac{n^{3n}}{(3n)^{3n} e^{-3n}} = \left(\frac{e}{3}\right)^{3n}.$$

La somme des n termes dont le rang est compris entre $3n$ et $4n-1$ est donc inférieure à

$$n\left(\frac{e}{3}\right)^{3n};$$

de même la somme des n termes dont le rang est compris entre $4n$ et $5n-1$ est inférieure à

$$n\left(\frac{e}{3}\right)^{4n}$$

et ainsi de suite. La somme des termes dont le rang dépasse $3n$ est donc inférieure à

$$n\left[\left(\frac{e}{3}\right)^{3n} + \left(\frac{e}{3}\right)^{4n} + \left(\frac{e}{3}\right)^{5n} + \dots\right],$$

c'est-à-dire à

$$n\left(\frac{e}{3}\right)^{3n} \frac{1}{1-\left(\frac{e}{3}\right)^{n}} < 2n\left(\frac{e}{3}\right)^{3n},$$

du moment que l'on suppose

$$\left(\frac{e}{3}\right)^{n} < \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$n > \frac{2}{\log 3},$$

ce qui est légitime.

En résumé, la somme des termes négligés dans la série e^x est inférieure à

$$\frac{n}{p} e^{n\left(\frac{1+\log p}{p}\right)} + 2n\left(\frac{e}{3}\right)^{3n}.$$

Le second terme est d'ailleurs inférieur à 1 dès que n dépasse une certaine limite, et peut être négligé; on en conclut que, *lorsque l'on ne conserve dans* $F(t)$, *pour* $|t| = nR'$, *que les termes dont le rang est compris entre* $\frac{n}{p}$ *et* $3n$, *on commet une erreur dont le module est inférieur à*

$$M\frac{n}{p} e^{n\left(\frac{1+\log p}{p}\right)}.$$

Par suite, dans le calcul de

$$\frac{1}{|t|}\log|F(t)|,$$

on commet une erreur dont le module est inférieur à

$$\frac{1}{nR'}\left[\log n + \log M - \log p + n\left(\frac{1+\log p}{p}\right)\right]$$

et cette expression tend évidemment vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, si l'on suppose que p augmente aussi indéfiniment. Notre première proposition est donc démontrée.

Pour démontrer la seconde, remarquons que, pour reconnaître si le point $z = \rho e^{i\theta}$ est extérieur ou intérieur au polygone de som-

mabilité, on doit étudier l'expression

$$e^{-\frac{|t|}{\rho}}|F(t)|$$

lorsque t augmente indéfiniment sur la demi-droite qui correspond à la direction θ. L'erreur commise dans le calcul de cette expression, lorsque $|t| = n R'$, est inférieure à

$$e^{-\frac{nR'}{\rho}} M \frac{n}{p} e^{n\left(\frac{1+\log p}{p}\right)}.$$

On voit qu'elle tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment si le nombre p est tel que l'on ait

$$\frac{1+\log p}{p} - \frac{R'}{\rho} < 0,$$

et l'on peut toujours choisir un nombre p satisfaisant à cette relation. D'ailleurs, il est clair que si l'on a

$$\frac{1+\log p}{p} - \frac{R}{\rho} < 0,$$

l'égalité étant exclue, on peut toujours choisir le nombre R', inférieur à ρ, assez voisin de ρ pour que l'inégalité reste vérifiée lorsqu'on y remplace R par R'; le nombre p ne dépend donc, comme nous l'avions annoncé, que du rapport $\frac{R}{\rho}$ (1).

74. Pour donner une application de la méthode précédente, nous allons démontrer qu'*une série de Taylor admet en général le cercle de convergence comme coupure.*

Cette proposition a été énoncée pour la première fois par M. Pringsheim (2); il est d'ailleurs clair qu'elle n'a un sens précis que si l'on définit les mots *en général* qui figurent dans son énoncé et qui n'ont, en eux-mêmes, aucune signification déter-

(1) La méthode précédente a été donnée pour la première fois par M. Borel, en 1896, dans son Mémoire du *Journal de Jordan* (*Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure*), puis reprise par lui sous forme générale aux *Comptes rendus*, 14 décembre 1896.

(2) *Math. Annalen*, t. XLIV. *Voir*, à ce sujet, des remarques de M. Borel, dans son Mémoire *Sur les séries divergentes* (*Ann. Éc. Norm.*, 1899, p. 58-59).

minée. Nous adopterons la définition suivante : une série de Taylor sera dite *générale* si la valeur du $n^{\text{ième}}$ coefficient est indépendante de la valeur des coefficients précédents.

Cela posé, nous remarquerons qu'il existe au moins un point singulier sur le cercle de convergence; il existe donc au moins un argument α tel que l'on ait

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{b} \log |\, F(be^{i\alpha}) \,| = \frac{1}{R},$$

en désignant par $\frac{1}{R}$ le rayon de convergence de $\varphi(z)$. Il existe donc une suite de nombres

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n, \quad \ldots$$

croissant indéfiniment avec leur indice et tels que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{b_n} \log |\, F(b_n e^{i\alpha}) = \frac{1}{R}.$$

Nous pouvons, pour éviter des complications d'écriture, admettre que les nombres b_n sont entiers; nous pouvons, de plus, en supprimant, s'il est nécessaire, un nombre quelconque d'entre eux, admettre que l'on a

$$3 b_{n-1} < \frac{b_n}{2} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Désignons par

$$P_n(t)$$

l'ensemble des termes de $F(t)$ dont le rang est compris entre

$$\frac{b_n}{2} \quad \text{et} \quad 3 b_n.$$

Les inégalités précédentes expriment que chaque coefficient de $\varphi(z)$ figure dans *un seul* des polynomes

$$P_1(t), \quad P_2(t), \quad \ldots, \quad P_n(t), \quad \ldots.$$

Il résulte d'ailleurs des propositions précédentes que l'on a [1]

$$(1) \qquad \overline{\lim}\, \frac{1}{b_n} \log |\, P_n(b_n e^{i\alpha}) \,| = \frac{1}{R}.$$

---

[1] En effet, si dans la formule du n° 73, on prend $\rho = R$, on peut supposer $p = 2$.

Il nous suffit de prouver, pour établir notre proposition, que si la série $\varphi(z)$ est générale, on peut, étant donné un argument quelconque β, choisir parmi les b_n une infinité de nombres

$$(2) \qquad b_{n_1}, \quad b_{n_2}, \quad \ldots, \quad b_{n_p}, \quad \ldots,$$

tels que l'on ait

$$(3) \qquad \overline{\lim} \frac{1}{b_{n_p}} \log |P_{n_p}(b_{n_p} e^{i\beta})| = \frac{1}{R}.$$

Dans ce but, nous remarquerons que, si l'on multiplie par $e^{i\theta}$ tous les coefficients de $\varphi(z)$ (c'est-à-dire tous les coefficients des P_n) et si l'on remplace α par $\alpha - \theta$, la formule (1) n'est pas altérée. Si d'ailleurs on effectue l'opération précédente seulement sur les coefficients d'une infinité de polynomes P_n, ayant pour indices les nombres (2), on aura la formule (3) si l'on pose

$$\beta = \alpha - \theta.$$

Or, nous avons déjà remarqué que chaque coefficient de $\varphi(z)$ figure dans un seul des polynomes P_n; si l'on suppose ces coefficients indépendants, leurs arguments ne sont liés par aucune relation et, par suite, on peut supposer que, pour une infinité d'entre eux, θ a une valeur quelconque donnée d'avance, c'est-à-dire que tout point β est singulier [1].

75. Nous n'insisterons pas davantage sur les séries non prolongeables au delà du cercle de convergence et renverrons pour ce sujet le lecteur à la seconde édition, déjà citée, de l'Ouvrage de M. Hadamard : *la série de Taylor et son prolongement analytique* (Chap. IV). Nous ne ferons de même que signaler les intéressantes applications de la méthode exponentielle et de ses géné-

---

[1] On peut rendre plus précis le raisonnement précédent en faisant voir que, si l'on désigne par θ_n la valeur de l'argument de z pour laquelle le polynome P_n a le plus grand module, lorsqu'on suppose $|z| = b_n$, tous les points limites de la suite

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \quad \theta_n, \quad \ldots$$

sont des points singuliers; si l'on marque sur le cercle de convergence tous les points $e^{i\theta_n}$ et si la série est *générale*, l'ensemble de ces points est *dense* sur tout arc de ce cercle et, par suite, tous les points du cercle sont singuliers (voir *Acta mathematica*, t. XXI, p. 243).

ralisations présentées par M. Paul Dienes, dans son Livre *Sur les singularités des fonctions analytiques :* le Chapitre III contient notamment des théorèmes précis, relatifs à la détermination des points singuliers algébriques, logarithmiques ou plus complexes, situés sur les côtés du polygone de sommabilité.

Nous dirons maintenant quelques mots des recherches de MM. Leau et Le Roy.

Les recherches de M. Leau peuvent être considérées comme ayant pour but d'obtenir des caractères de sommabilité analogues aux caractères de convergence.

L'étude de la convergence des séries repose essentiellement sur leur comparaison avec d'autres séries simples et déjà connues. Cette comparaison se trouve possible parce qu'en réalité la convergence d'une série ne dépend que du terme général considéré isolément. M. Leau s'est demandé si, d'une manière analogue, l'extension possible d'une fonction représentée par une série de Taylor ne pourrait pas se déduire de la comparaison de cette série avec d'autres représentant des fonctions déjà connues. Il a exposé ses recherches dans le *Journal de M. Jordan* (1).

Étant donnée une série

$$f(z) = \Sigma a_p z^p, \tag{1}$$

afin de voir s'il y a sur un arc PQ de son cercle de convergence des points singuliers, prenons sur le rayon bissecteur de cet arc un point B$(z = b)$. Pour qu'il n'y ait pas de points singuliers sur l'arc entre P et Q, il faut et il suffit que l'on puisse choisir $|b|$ assez petit pour que le rayon de convergence de la nouvelle série

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(b)\, z^n \tag{2}$$

soit au moins égal à BP.

Or l'inverse de ce rayon est la plus grande des limites de l'expression

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|f^{(n)}(b)|} = \sqrt[n]{\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} \frac{p!}{n!(p-n)!}\, a_p b^{p+n}\right|}. \tag{3}$$

---

(1) *Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. V, 1899).

Cette expression fait intervenir, en apparence du moins, la totalité des coefficients a. M. Leau a démontré (¹) que l'on ne change pas la plus grande des limites de l'expression (3), si l'on se borne à faire varier, dans la formation de la dérivée, p de n à n', $\frac{n'}{n}$ restant supérieur à un nombre fixe plus grand que 1, du moins dès que $|b|$ est assez petit, ce que l'on peut toujours supposer (²).

En d'autres termes, il existe des suites de nombres dépendant de b et d'un entier n,

$$\alpha_{nn}, \quad \alpha_{n+1,n}, \quad \ldots, \quad \alpha_{n',n},$$

telles que la solution du problème dépend de la plus grande des limites de

$$|\alpha_{n,n}a_n + \alpha_{n+1,n}a_{n+1} + \ldots + \alpha_{n',n}a_{n'}|^{\frac{1}{n'}},$$

c'est-à-dire du $n^{\text{ième}}$ *ensemble des coefficients* $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n'}$. Cette expression

$$\alpha_{nn}a_n + \ldots + \alpha_{n'n}a_{n'},$$

qui joue dans l'extension des séries un rôle analogue à celui du terme général pour la convergence, nous l'appelons le *terme général étendu* relatif à l'arc PQ ; n sera son rang et n' son indice.

Une simplification semblable s'obtient lorsque l'on cherche si la fonction $f(z)$ est holomorphe le long d'une ligne L allant de l'origine O à un point P du plan. Théoriquement, il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que l'on puisse trouver une file de cercles empiétant successivement les uns sur les autres, dont les centres sont distribués sur L de O à P, et tels que les développements de $f(z)$ relatifs aux centres successifs convergent dans les cercles correspondants. Si nous désignons les centres par O, O_1, O_2, ..., O_s (ou P), et par $\Sigma a_{nh} z^n$ le développement, supposé possible, au point O_h, la conception précédente oblige à former

(¹) Dans sa Thèse, M. Hadamard avait déjà fait, relativement à l'expression (3) des calculs ayant pour conséquence que les termes qui dépassent un certain rang n' sont négligeables.

(²) Pour cette démonstration, comme pour plusieurs autres, dont le détail est assez long, nous renverrons au Mémoire de l'auteur.

successivement les expressions

$$(4) \qquad a_{n,h+1} = c_n a_{n,h} + c_{n+1} a_{n+1,h} + \ldots,$$

les quantités c_n, c_{n+1}, ... ne dépendant pas de la fonction $f(z)$, mais de n et du segment $O_h O_{h+1}$; puis à voir quelles sont, pour les valeurs successives de h, les plus grandes limites des $|a_{n,h+1}|^{\frac{1}{n}}$, pour n infini.

Or, on ne change pas les plus grandes limites de ces expressions si, sous certaines conditions, dans le calcul des $a_{n,h+1}$, on substitue aux séries (4) des polynomes

$$(5) \qquad c_n a'_{n,h} + c_{n+1} a'_{n+1,h} + \ldots + c_{\varphi_{h+1}(n)} a'_{\varphi_{h+1}(n),h},$$

$a'_{n,h}$, ..., $a'_{\varphi_{h+1}(n),h}$ désignant des valeurs approchées de $a_{n,h}$, ..., $a_{\varphi_{h+1}(n),h}$ qui ont été eux-mêmes précédemment calculés d'une manière inexacte. Ainsi, les quantités a_{n1}, a'_{n2}, ..., a'_{np}, ... s'expriment en fonction linéaire et homogène des quantités a_n, a_{n+1}, ..., $a_{n'}$; ces polynomes sont les termes étendus relatifs à la ligne L et à la file de cercles considérée. On parvient ainsi à la conclusion suivante :

Le problème, holomorphisme le long de L, ne dépend que des suites des termes généraux étendus de rang n, relatives aux files de cercles. Plus simplement encore, il ne dépend que de la suite des $n^{\text{ièmes}}$ ensembles des coefficients de la série

$$\Sigma a_p z^p : a_n, \quad a_{n+1}, \quad a_{n'}.$$

Mais, et c'est la différence essentielle entre ce nouveau résultat et celui qui avait trait à un arc du cercle de convergence, le rapport de l'indice n' au rang n de l'ensemble doit être infini avec n, pour que les conclusions soient valables.

Ces remarques fort simples conduisent à des applications très intéressantes.

76. *Formation de séries ayant des points singuliers connus.* — Voici, en le particularisant, un exemple donné par M. Leau. Soit $\Sigma a_p z^p$ une série pour laquelle le point d'affixe $+1$ est singulier. Le terme général, étendu par rapport à ce point, étant désigné par u_n, supposons que la suite $|u_n|^{\frac{1}{n}}$, $|u_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}$, ... ait

pour limite $\frac{1}{1-b}$, b ayant la même signification que tout à l'heure. La série

$$\Sigma a_p e^{-2i\pi p\omega} z^p \tag{6}$$

présente les mêmes particularités pour $z = e^{2i\pi\omega}$. Empruntons une infinité d'ensembles de coefficients, sans éléments communs, à autant de séries (6) que nous voudrons; la série formée représente une fonction ayant tous les points $z = e^{2i\pi\omega}$ correspondants comme points singuliers.

77. *Formation de fonctions holomorphes dans une région.* — Soit une ligne L issue de l'origine, et supposons que l'on ait des séries

$$f_1(z) = \Sigma a_{p1} z^p, \quad f_2(z) = \Sigma a_{p2} z^p, \quad \ldots, \quad f_k(z) = \Sigma a_{pk} z^p, \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elles représentent des fonctions holomorphes dans une aire qui comprend L, les distances des points de la ligne au contour de l'aire admettant un minimum différent de zéro;

2° Les modules des fonctions ont, dans la région considérée, une limite supérieure finie;

3° Dans les différences $f_{n+1}(z) - f_n(z)$ les termes dont le rang varie de n à $\varphi(n)$, $\frac{\varphi(n)}{n}$ devenant infiniment grand avec n, admettent comme termes majorants ceux d'une certaine série fixe, convergente dans un cercle qui comprend L à son intérieur.

On peut dire que les fonctions forment une famille de séries *tangentes le long des polynomes* formés, pour f_n et f_{n+1} des termes dont l'indice va de n à $\varphi(n)$.

Toute série dont les termes sont des termes de polynomes de contact représente une fonction holomorphe le long de L.

La démonstration repose sur ce fait que les termes étendus d'une pareille série ne diffèrent de ceux d'une fonction f que d'assez peu pour ne pas modifier les plus grandes limites des racines $n^{\text{ièmes}}$ de leurs modules.

78. Parmi les conséquences de ce théorème, citons seulement deux cas particuliers :

1° *Si la fonction $g(t)$ est holomorphe à l'origine, la fonction*

$$f(z) = \Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) z^n$$

n'a à distance finie que le point singulier $+1$;

2° *Si la fonction entière $g(t)$ est d'ordre inférieur à* 1 [1] *ou si, étant d'ordre* 1, *son module maximum* $M(r)$ *pour* $|t| = r$, *élevé à la puissance* $\frac{1}{r}$, *a l'unité pour plus grande limite, la fonction*

$$f(z) = \Sigma g(n) z^n$$

n'a que le point singulier $+1$ *à distance finie.*

Les résultats précédents montrent combien est particulier le cas où la forme analytique de a_n, considérée comme fonction de n, est connue. Notons qu'on peut toujours supposer, sans détriment de la généralité, que a_n est une fonction entière de n, car il existe une infinité de fonctions entières acquérant des valeurs données pour les valeurs entières de la variable. Pour obtenir des cas particuliers, on devra donc soumettre la fonction entière $g(n)$ à des hypothèses convenables, analogues à celles qui interviennent dans le second des énoncés précédents.

79. Le Mémoire déjà cité de M. Le Roy, paru en 1900 dans les *Annales de Toulouse*, est en partie consacré à des résultats du même genre. Il établit de son côté le théorème 1° du n° 78 en remarquant d'abord, qu'en vertu de la relation facile à vérifier

$$\frac{1}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{p-1} x^{n-1}\, dx,$$

on a

$$\sum_1^\infty \frac{z^n}{n^p} = \frac{z}{\Gamma(p)} \int^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{p-1} \frac{dx}{1 - zx};$$

---

[1] On dit que $g(t)$ est d'ordre apparent α si $M(r)$ a une croissance moins rapide que $e^{r^{\alpha+\varepsilon}}$ et plus rapide que $e^{r^{\alpha-\varepsilon}}$, si petit qu'on ait pris le nombre positif ε.

soit alors

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{n} + \frac{\lambda_2}{n^2} + \ldots \qquad (\text{avec } |\lambda_p| < K^p, \text{ où } K = \text{const. pos.})$$

en posant

$$\varphi(x) = \frac{\lambda_1}{\Gamma(1)} + \frac{\lambda_2}{\Gamma(2)} L\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\lambda_3}{\Gamma(3)}\left[L\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 + \ldots$$

on obtient une fonction entière de $L\,\frac{1}{x}$, satisfaisant, lorsque x est compris entre 0 et 1, à l'inégalité

$$|\varphi(x)| < K e^{KL\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{K}{x^K}.$$

On en conclut que l'intégrale

$$\int_0^1 \varphi(x)\, x^{n-1}\, dx$$

a un sens à partir de la valeur n_0 de l'entier n immédiatement supérieure à K. On en conclut aisément que $f(z)$ est la somme d'un polynome de degré n_0 et de l'expression

$$\frac{\lambda_0 z_0^{n+1}}{1-z} + z^{n_0+1}\int_0^1 \varphi(x)\frac{x^{n_0}}{1-zx}\,dx;$$

grâce à cette représentation explicite partout valable, on démontre facilement que $f(z)$ est une fonction non uniforme, dont les seuls points critiques sont 1 et ∞. Le même résultat subsisterait si la fonction $g(t)$ admettait le point $t=0$ pour pôle : c'est ce qu'on verra en étudiant directement les fonctions définies par les séries

$$1 + z + 2\,z^2 + 3\,z^3 + \ldots + n\,z^n + \ldots = 1 + \frac{z}{(1-z)^2},$$

$$1 + z + 2^2 z^2 + 3^2 z^3 + \ldots + n^2 z^n + \ldots = 1 + z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(1-z)^2}\right],$$

....,

et démontrant par récurrence que leur seul point singulier est le pôle $z=1$.

Ce principe de représentation analytique explicite (extrêmement commode dans les cas qui permettent son emploi) a été appliqué par M. Le Roy sous des formes très variées. Appelons

maintenant $g(t)$ une fonction entière de genre p fini n'ayant que des zéros simples à parties réelles négatives et $g'(t)$ sa dérivée. On peut montrer (nous l'admettrons) que l'on a

$$\sum_1^\infty \frac{g'(n)}{g(n)} z^n = \sum_1^\infty \mathrm{P}(n)\, z^n + (-1)^p \int_0^1 \varphi(x) \frac{z\,\mathrm{Q}(zx)}{(1-z)\,x^{p+1}}\, dx,$$

P et Q désignant des polynomes. On voit alors facilement que $+1$ et ∞ sont encore les seuls points singuliers.

M. Le Roy s'est également occupé des séries de la forme

$$\sum_0^\infty g(n)\, z^n$$

où $g(t)$ désigne une fonction entière soumise à certaines inégalités de croissance. Dans le cas où son module maximum croît moins vite que $e^{\varepsilon r}$ (où $r = |t|$) (¹) on démontre que $\sum\limits_0^\infty g(n) z^n$ représente une fonction *uniforme* n'ayant que le seul point singulier $z = 1$; ici, le point à l'infini est donc régulier.

80. Mais M. Le Roy est allé encore plus loin. Il traite le cas d'une série $\sum\limits_0^\infty \alpha_n z^n$ où α_n est une fonction analytique de n holomorphe dans un certain domaine auquel appartiennent les grandes valeurs positives de n.

Dans ce but, il utilise la méthode des transformations conformes, employée par M. Lindelöf dans la théorie du prolongement analytique pour passer d'une série de Taylor à d'autres séries, ayant des régions de convergence variées et de plus en plus grandes. Par exemple, on peut se servir de la transformation

---

(¹) Cette forme d'énoncé est celle qu'indique M. Hadamard dans son Ouvrage cité. En réalité, M. Le Roy donne à son théorème une forme un peu plus générale. Il prend le cas où la fonction $g(t) = \sum \frac{\lambda_p}{p!} t^p$ est telle que la fonction $\Sigma \lambda_p t^p$ [admettant $g(t)$ comme associée] soit elle-même entière : cette condition est en particulier réalisée lorsque $g(t)$ est d'ordre apparent inférieur à un.

d'Euler [1] qui consiste à poser

$$x = \frac{y}{1+y}, \qquad \text{d'où} \qquad y = \frac{x}{1-x};$$

à une série $\Sigma \lambda_n y^n$ qui converge pour $|y| < k < 1$, correspond une série en x convergente à l'extérieur du cercle défini par

$$\left| \frac{x}{1-x} \right| = k.$$

Cette méthode, convenablement appliquée, peut encore servir à mettre une fonction donnée par son développement taylorien sous la forme d'une intégrale définie analogue à celles que nous venons de citer. Le changement de variable portera ici, non sur la série même, mais sur l'expression du coefficient α_n.

Supposons d'abord que α_n soit une fonction holomorphe de n lorsque la partie réelle de n surpasse $-\frac{1}{2}$. C'est dire qu'en posant

$$\frac{n}{n+1} = t,$$

nous aurons $|t| < 1$. Donc α_n se ramène par la transformation d'Euler à une fonction de t, représentable par une série $\sum_0^\infty \lambda_p t^p$ absolument convergente pour $|t| < 1$. M. Le Roy fait alors l'hypothèse que pour $t = 1$, la série $\sum_0^\infty \lambda_p$ soit absolument sommable au sens de M. Borel (hypothèse qui englobe notamment le cas où cette série convergerait absolument). Il montre alors qu'on peut écrire, en désignant par $f(z)$ la fonction analytique définie par la série $\Sigma \alpha_n z^n$,

$$f(z) = \alpha_0 + \frac{\lambda_0 z}{1-z} + z \int_0^1 \varphi(y) \frac{dy}{(1-zy)^2},$$

avec

$$\varphi(y) = \int_0^\infty e^{-x} J_0\left(2\sqrt{x L \frac{1}{y}}\right) F(x)\, dx,$$

J_0 est le symbole classique de la fonction de Bessel d'indice zéro

---

[1] On pourra voir, dans l'Ouvrage cité de M. Hadamard (p. 53), le parti que M. Fabry a tiré dans un autre ordre d'idées de cette même transformation.

et $F(x)$ est une fonction entière associée à la série $\Sigma\lambda_p x^p$, soit

$$F(x) = \sum_0^\infty \lambda_{p+1} \frac{x^p}{p!}.$$

On voit par là que $f(z)$ est une fonction analytique de z, dont les seuls points singuliers seront localisés sur la demi-droite $(1, +\infty)$ du plan de la variable z. Cette demi-droite peut constituer une coupure essentielle, car $\varphi(y)$ n'est pas forcément analytique.

Cela posé, en remplaçant la transformation d'Euler par la suivante

$$t = 1 - \frac{1}{(n+1)^p},$$

on pourra se borner à supposer α_n holomorphe dans la région du plan (n) obtenue en posant

$$n = \rho e^{i\omega},$$

et en prenant

$$\rho > \rho_0, \qquad |\omega| < \frac{\pi}{2p}.$$

Il suffira donc que α_n soit une fonction holomorphe de n dans un domaine angulaire contenant, à son intérieur, l'axe réel positif du plan n.

Nous n'insisterons pas davantage : les formules que nous avons citées soulignent assez l'intérêt des résultats de M. Le Roy. Non seulement, elles donnent les points singuliers de la fonction considérée, mais dans beaucoup de cas permettent d'en étudier l'allure. On entrevoit ainsi la possibilité d'appliquer les résultats acquis à la sommation de séries de Taylor à convergence nulle, puisque, dans des cas étendus, nous pourrons, d'après ce qui précède, étudier la fonction associée d'une manière assez complète.

CHAPITRE V.

LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE POLYNOMES [1].

Le théorème de M. Mittag-Leffler.

81. Nous avons vu au Chapitre précédent que, étant donnée une fonction analytique définie par une série de Taylor

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

la théorie des séries sommables permet de déduire de la série $\varphi(z)$ une expression simple de cette fonction, valable dans une région plus étendue que le cercle de convergence.

M. Mittag-Leffler s'est proposé de généraliser ce résultat et il est parvenu à une solution à la fois très élégante et aussi complète qu'on pouvait le désirer. Il est clair, en effet, que si l'on veut, comme il est naturel, se borner à considérer des expressions analytiques uniformes on doit, dans le cas où la fonction $\varphi(z)$ n'est pas uniforme, étudier seulement une branche déterminée de cette fonction, c'est-à-dire tracer dans le plan des coupures telles que $\varphi(z)$ soit uniforme, lorsqu'on assujettit la variable z à ne pas traverser ces coupures. La manière la plus simple de tracer ces coupures consiste à joindre le point $O(z = 0)$ à chaque point singulier de $\varphi(z)$ et à prolonger jusqu'à l'infini chacune de ces droites : *ces prolongements seront les coupures;* la figure géométrique ainsi obtenue est appelée *étoile* par M. Mittag-Leffler, de sorte que le

---

[1] Ce Chapitre n'a pas seulement un caractère didactique. Il marque le contact des idées de deux grands géomètres. Il subsiste intégralement ici sous la forme qu'il avait dans sa première édition. On pourra le compléter utilement par la lecture de l'Ouvrage fondamental de M. Borel, *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe* (rédigées par M. Julia).

[Note de M. Georges Bouligand.]

problème résolu par lui peut être énoncé de la manière suivante : *trouver une expression de $\varphi(z)$ valable dans toute l'étoile.*

L'expression donnée par M. Mittag-Leffler est une série de polynomes : *cette série est uniformément convergente dans toute région intérieure à l'étoile*, c'est-à-dire dans toute région finie dont le contour n'a aucun point commun avec les coupures. Cette dernière condition est à peu près indispensable dans les applications; une condition analogue doit être vérifiée lorsque $\varphi(z)$ se présente comme la limite d'une expression dépendant d'un paramètre (continu ou discontinu); cette expression doit tendre *uniformément* vers sa limite ([1]).

Nous allons, dans ce premier paragraphe, exposer la méthode même de M. Mittag-Leffler; dans le paragraphe suivant, nous en indiquerons diverses généralisations; enfin, nous terminerons en indiquant comment ces diverses méthodes peuvent, sans modification essentielle, s'appliquer à certaines séries *dont le rayon de convergence est nul* et en recherchant quelles relations il y a entre les diverses considérations développées dans ce Chapitre et la théorie générale des séries divergentes.

Rappelons d'abord un théorème fondamental de la théorie des fonctions analytiques; si l'on désigne par ρ un nombre positif tel que la fonction $\varphi(z)$ soit holomorphe à l'intérieur du cercle C, de rayon ρ et de centre x, et par g le maximum du module de $\varphi(z)$ sur le cercle, on a ([2])

$$\left|\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}\right| < \frac{g}{\rho^n}. \tag{2}$$

([1]) C'est ainsi que, dans le cas de la méthode exponentielle, l'intégrale

$$\int_0^A e^{-a} F(az)\,da$$

tend *uniformément* vers $\varphi(z)$, lorsque A augmente indéfiniment, dans toute région *intérieure* au polygone de sommabilité.

([2]) On a en effet

$$\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}$$

et le module de l'intégrale est inférieur à

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{g\,|dz|}{\rho^{n+1}} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{g\,2\pi\rho}{\rho^{n+1}} = \frac{g}{\rho^n}.$$

Cette inégalité subsiste d'ailleurs *a fortiori*, si l'on suppose que g désigne le maximum du module de $\varphi(z)$ sur un contour C′ à l'intérieur duquel cette fonction est holomorphe, si tous les points de C sont intérieurs à C′. On sait, en effet, qu'une fonction harmonique régulière en ce point ne peut être en ce point ni maximum ni minimum; il suffit d'appliquer ce théorème à $\log|\varphi(z)|$.

L'inégalité fondamentale permet de trouver aisément une limite supérieure de l'erreur commise lorsque, dans le développement de Taylor de $\varphi^{(\mu)}(x+z)$, on s'arrête au terme de rang m. On a

$$\varphi^{(\mu)}(x+z) = \sum_0^\infty \frac{\varphi^{(\mu+n)}(x)}{n!} z^n.$$

On a évidemment

$$\left|\frac{\varphi^{(\mu+n)}(x)z^n}{n!}\right| < \left|\frac{\varphi^{(\mu+n)}(x)}{(\mu+n)!}\right| (\mu+n)^\mu |z|^n < \frac{g}{\rho^\mu}(\mu+n)^\mu \left|\frac{z}{\rho}\right|^n.$$

Supposons que l'on ait

$$\left|\frac{z}{\rho}\right| < \frac{1}{3} \tag{3}$$

et que m soit assez grand par rapport à μ pour que l'on ait, pour $m' > m$,

$$(\mu + m')^\mu \left(\frac{1}{3}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

c'est-à-dire

$$\mu \log(\mu + m') < m'(\log 3 - \log 2). \tag{4}$$

On pourra alors écrire

$$\varphi^{(\mu)}(x+z) = \sum_0^m \frac{\varphi^{(\mu+n)}(x)}{n!} z^n + \varepsilon_\mu \tag{5}$$

avec

$$|\varepsilon_\mu| < \frac{g}{\rho^\mu} \sum_{m+1}^\infty \frac{1}{2^n} = \frac{g}{\rho^\mu 2^m}. \tag{6}$$

Ces inégalités fondamentales établies, désignons par X un domaine quelconque *intérieur* [1] à l'étoile relative à la fonction $\varphi(z)$; nous pouvons toujours supposer ce domaine X tel que

[1] On entend par là, comme il a déjà été expliqué, que le contour de X reste à distance finie et n'a pas de point commun avec les lignes qui limitent l'étoile.

son contour soit rencontré en un seul point par toute demi-droite issue de l'origine; sinon on le remplacerait par un domaine X' ayant cette dernière propriété, ce domaine X' étant intérieur à l'étoile et renfermant X à son intérieur ([1]).

Le domaine X étant *intérieur* à l'étoile, le rayon de convergence du développement de $\varphi(z)$ relatif à un point x de X a un minimum ρ' certainement différent de zéro; car ce rayon varie d'une manière continue avec x et par suite atteint son maximum, puisque l'ensemble comprenant l'intérieur de X et les points de son contour est parfait; ce minimum ne peut donc pas être nul.

Désignons par ρ un nombre positif inférieur à ρ' et C l'ensemble des points obtenus en adjoignant aux points de X les points des cercles de rayon ρ ayant pour centres les divers points de X; soit g le maximum du module $\varphi(z)$ dans le domaine C (ce maximum est atteint en un point du contour de C). Nous pourrons écrire l'inégalité (2), dans laquelle x sera un point quelconque intérieur à X et, par suite, les inégalités (3) et (4) entraîneront la relation (5) et l'inégalité (6).

Soit maintenant x un point quelconque intérieur à X; nous pouvons déterminer un nombre entier n tel que l'on ait

$$\left|\frac{x}{n}\right| < \frac{\rho}{3}; \tag{7}$$

nous supposerons le nombre n choisi de telle manière que cette inégalité soit vérifiée, quel que soit x intérieur à X, ce qui est possible puisque X est fini. Nous poserons

$$a = \frac{x}{n}, \qquad b = a + \frac{x}{n} = \frac{2x}{n}, \qquad c = b + \frac{x}{n} = \frac{3x}{n}, \qquad \ldots,$$
$$s = \frac{(n-2)x}{n}, \qquad t = s + \frac{x}{n} = \frac{(n-1)x}{n}, \qquad x = t + \frac{x}{n} = \frac{nx}{n}.$$

([1]) Pour définir X' on peut se contenter de dire que, si x est intérieur à X, tous les points $x' = \theta x$, où θ est réel, positif et inférieur ou égal à *un*, seront intérieurs à X'. Le domaine X' ainsi obtenu est tel que son contour est rencontré en général en un seul point par toute demi-droite issue de l'origine; il y a des demi-droites exceptionnelles dont les segments font partie du contour de X'; elles rencontrent donc ce contour en une infinité de points. Il serait d'ailleurs aisé de modifier X' de manière à supprimer ces exceptions; ce n'est pas nécessaire ici.

La méthode de M. Mittag-Leffler consiste essentiellement, pour calculer un polynome approché de $\varphi(x)$, à calculer des polynomes approchés des diverses quantités $\varphi^{(\mu)}(a)$, $\varphi^{(\mu)}(b)$, ..., $\varphi^{(\mu)}(t)$, pour des valeurs convenablement choisies de μ.

Nous utiliserons pour cela la relation fondamentale (5) avec les inégalités (3), (4), (6) qui la complètent. Si dans la relation (5) nous remplaçons x par zéro et z par a ou $\frac{x}{n}$, l'égalité (3) se réduit à (7), qui est supposée vérifiée, et nous obtenons

$$\varphi^{(\mu)}(a) = A_\mu + \alpha_\mu, \tag{8}$$

en posant

$$A_\mu = \sum_{\lambda_1=0}^{n^{2n}} \frac{\varphi^{(\mu+\lambda_1)}(0)}{\lambda_1!}\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1},$$

$$|\alpha_\mu| < \frac{g}{\rho^\mu 2^{n^{2n}}}. \tag{9}$$

Nous avons pris $m = n^{2n}$; l'inégalité (4) sera vérifiée si l'on suppose (¹)

$$\mu \leqq 2n^{2n-2}.$$

Remplaçons maintenant dans (5) x par a et z toujours par $\frac{x}{n}$; il viendra

$$\varphi^{(\mu)}(b) = B'_\mu + \beta'_\mu,$$

en posant

$$B'_\mu = \sum_{\lambda_2=0}^{\lambda_2=n^{2n-2}} \frac{\varphi^{(\mu+\lambda_2)}(a)}{\lambda_2!}\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_2},$$

$$|\beta'_\mu| < \frac{g}{\rho^\mu 2^{n^{2n-2}}}.$$

Nous avons pris $m = n^{2n-2}$; l'inégalité (4) sera vérifiée si l'on suppose $\mu < 2n^{2n-4}$.

Remplaçons dans l'expression de B'_μ les $\varphi^{(\mu+\lambda_2)}(a)$ par leurs

---

(¹) En effet, pour $m' = 2^{2n}$, $\mu = 2n^{2n-2}$, cette inégalité devient

$$2\log(2n^{2n-2} + n^{2n}) < n^2(\log 3 - \log 2),$$

c'est-à-dire

$$\log n + \frac{1}{2n}\log\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) < n\frac{\log 3 - \log 2}{4},$$

et est visiblement vérifiée pour $n > 10$; l'inégalité (4) subsiste d'ailleurs *a fortiori* lorsqu'on augmente m' et qu'on diminue μ.

valeurs (8), ce qui est possible puisque $\mu+\lambda_2$ est ici constamment inférieur à $2n^{2n-2}$; il viendra

$$B'_\mu = B_\mu + \beta''_\mu,$$

en posant

$$B_\mu = \sum_{\lambda_2=0}^{\lambda_2=n^{2n-2}} \sum_{\lambda_1=0}^{\lambda_1=n^{2n}} \frac{\varphi^{(\mu+\lambda_1+\lambda_2)}(0)}{\lambda_1!\,\lambda_2!}\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2},$$

$$\beta''_\mu = \sum_{\lambda_2=0}^{\lambda_2=n^{2n-2}} \frac{\alpha_{\mu+\lambda_2}}{\lambda_2!}\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_2},$$

d'où, en utilisant les inégalités (9),

$$|\beta''_\mu| < \sum_{\lambda_2=0}^{\lambda_2=n^{2n-2}} \frac{g}{2^{n^{2n}}\rho^{\mu+\lambda_2}} \frac{1}{\lambda_2!}\left|\frac{x}{n}\right|^{\lambda_2} < \frac{g}{2^{n^{2n}}\rho^\mu}\sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_2!}\left(\frac{1}{3}\right)^{\lambda_2} = \frac{g}{2^{n^{2n}}\rho^\mu}\, e^{\frac{1}{3}}.$$

On a donc, en posant

$$\beta_\mu = \beta'_\mu + \beta''_\mu,$$

les relations

$$\varphi^{(\mu)}(b) = B_\mu + \beta_\mu,$$

$$(10) \qquad |\beta_\mu| < \frac{2g}{\rho^\mu 2^{n^{2n-2}}}.$$

On calculera de même les quantités $\varphi^{(\mu)}(c)$; on posera

$$\varphi^{(\mu)}(c) = C'_\mu + \gamma'_\mu,$$

$$C'_\mu = \sum_{\lambda_3=0}^{n^{2n-4}} \frac{\varphi^{(\mu+\lambda_3)}(b)}{\lambda_3!}\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_3},$$

et l'on aura

$$|\gamma'_\mu| < \frac{g}{\rho^\mu 2^{n^{2n-4}}}$$

en supposant ici $\mu \leqq 2n^{2n-6}$.

On remplacera dans C'_μ les $\varphi^{(\mu+\lambda_3)}(b)$ par leurs valeurs (10), et l'on obtiendra

$$C'_\mu = C_\mu + \gamma'_\mu$$

avec

$$C_\mu = \sum_{\lambda_3=0}^{n^{2n-4}} \sum_{\lambda_2=0}^{n^{2n-2}} \sum_{\lambda_1=0}^{n^{2n}} \frac{\varphi^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\mu)}(0)}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\lambda_3!}\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3},$$

$$\gamma''_\mu = \sum_{\lambda_3=0}^{n^{2n-4}} \frac{\beta_{\mu+\lambda_3}}{\lambda_3!}\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_3},$$

d'où

$$|\gamma''_\mu| < \frac{2g}{\rho^\mu 2^{n^{2n-2}}} \sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_3!} \frac{1}{\rho^{\lambda_3}} \left|\frac{x}{n}\right|^{\lambda_3} < \frac{3g}{\rho^\mu 2^{n^{2n-4}}}$$

et, par suite,

$$|\gamma_\mu| < \frac{2g}{\rho^\mu 2^{n^{2n-4}}},$$

en posant

$$\gamma_\mu = \gamma'_\mu + \gamma''_\mu,$$

d'où

$$\varphi^{(\mu)}(c) = C_\mu + \gamma_\mu.$$

En procédant ainsi de proche en proche, on finira par obtenir

$$\varphi^{(\mu)}(t) = T_\mu + \tau_\mu,$$

en supposant $\mu \leqq 2n^2$ et en posant

$$T_\mu = \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{n^4} \sum_{\lambda_{n-2}=0}^{n^6} \cdots \sum_{\lambda_2=0}^{n^{2n-2}} \sum_{\lambda_1=0}^{n^{2n}} \frac{\varphi^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}+\mu}(0)}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_{n-1}!} \left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}}.$$

On a d'ailleurs

$$|\tau_\mu| < \frac{2g}{\rho^\mu 2^{n^4}}.$$

On déduit de là

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda_n=0}^{\lambda_n=n^2} \frac{\varphi^{(\lambda_n)}(t)}{\lambda_n!} \left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_n} + \eta'$$

avec, d'après (6), où l'on doit faire $\mu = 0$, $m = n^2$

$$|\eta'| < \frac{g}{2^{n^2}}.$$

En remplaçant les $\varphi^{(\lambda_n)}(t)$ par leur valeur, on obtient

$$\varphi(x) = g_n(x) + \eta' + \eta'',$$

en posant

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^{2n}} \sum_{\lambda_2=0}^{n^{2n-2}} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^2} \frac{\varphi^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(0)}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} \left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n},$$

$$\eta'' = \sum_0^{n^2} \frac{\tau_\mu}{\mu!} \left(\frac{x}{n}\right)^\mu.$$

En posant $\eta_n = \eta' + \eta''$, on obtient finalement

(11) $$\varphi(x) = g_n(x) + \eta_n$$

avec ([1])

$$(12) \qquad |\eta_n| < \frac{2g}{2^{n^2}}.$$

Les formules (11) et (12) nous donnent la solution complète du problème. Il ne faut pas oublier que l'inégalité (12) est vérifiée, quel que soit le domaine X choisi, intérieur à l'étoile, à partir d'une certaine valeur de n, laquelle ne dépend que de X. Dès lors si l'on pose

$$G_0(x) = g_0(x) = \varphi(0),$$
$$G_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x),$$
$$\varphi(x) = \sum_0^\infty G_n(x),$$

cette dernière série convergera pour tout point x intérieur à l'étoile. La convergence sera, de plus, *absolue et uniforme* à l'intérieur de tout domaine fini X, intérieur à l'étoile. En effet, le domaine X étant choisi, il existera une valeur fixe n, telle que, pour $n \geqq n'$, on aura, quel que soit x intérieur à X,

$$|G_n(x)| = |g_n - g_{n-1}| = |\varphi - g_n - (\varphi - g_{n-1})| < |\varphi - g_n| + |\varphi - g_{n-1}|,$$

c'est-à-dire

$$|G_n(x)| < |\eta_n| + |\eta_{n-1}| < \frac{3g}{2^{(n-1)^2}}.$$

Tel est le résultat fondamental de Mittag-Leffler; nous avons suivi, pour le démontrer, une marche tout à fait analogue à celle de son auteur ([2]); nous verrons dans le paragraphe suivant comment on peut y arriver par une toute autre voie. Nous aurons ainsi des résultats susceptibles d'une généralisation qui n'aurait pu être obtenue en restant au point de vue de M. Mittag-Leffler; en effet,

---

([1]) Cette valeur de η_n permettrait de simplifier un peu la seconde partie de mon Mémoire : *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta mathematica*, t. XXIV, p. 309).

([2]) *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène* (première Note) (*Acta mathematica*, t. XXIII, p. 43). On trouvera là une liste des autres Mémoires de M. Mittag-Leffler sur ce sujet.

Voir aussi LEAU, *Représentation des fonctions par des séries de polynomes* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVII, p. 194).

la méthode, telle qu'elle vient d'être exposée, ne renferme théoriquement rien de plus que la théorie du prolongement analytique et ne peut conduire à des résultats auxquels on ne saurait parvenir au moyen de cette théorie.

L'emploi de l'intégrale de Cauchy.

82. Nous allons indiquer une méthode, basée sur la considération de l'intégrale de Cauchy (¹)

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(x)\,dx}{x-z},$$

et permettant d'obtenir une infinité de solutions du problème du prolongement analytique, solutions parmi lesquelles il y en a une infinité qui sont aussi générales que la solution de M. Mittag-Leffler.

L'intégrale de Cauchy donne l'expression de $f(z)$ sous la forme de la somme d'une infinité de fractions simples $\frac{1}{x-z}$, x parcourant tout ce contour C; nous déduirons le prolongement analytique de $f(z)$ du prolongement analytique de chacune de ces fractions, ou, ce qui revient au même, des fractions $\frac{1}{1-\frac{z}{x}}$.

Nous supposerons que l'on connaisse un moyen de prolonger analytiquement la série

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots,$$

ce moyen n'employant d'ailleurs que des expressions *linéaires* par rapport à z, z^2, ..., z^n, ...

D'une manière plus précise (²), supposons que nous sachions

(¹) On trouvera dans l'Appendice une méthode simple de M. Le Roy qui conduit à ce résultat.

(²) On pourrait donner au mot *linéaire* un sens plus général; supposer, par exemple, que les expressions linéaires par rapport aux z^n figurent sous des signes d'intégration, et que l'intégration terme à terme n'est pas possible. Le cas étudié dans le texte nous suffira.

déterminer une infinité de séries entières

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots,$$

pouvant, en particulier, se réduire à des polynomes et telles que l'on ait, quel que soit z à l'intérieur d'une aire déterminée A,

$$\frac{1}{1-z} = \lim_{n=\infty} f_n(z).$$

Les séries $f_n(z)$ doivent évidemment converger lorsque z est intérieur à A.

Nous supposerons que l'aire A comprend à son intérieur le cercle de convergence, bien que cette hypothèse ne soit pas absolument indispensable [1]. Enfin, nous admettrons que si A′ est une aire finie *intérieure* à A (les contours des deux aires n'ayant pas de point commun) $f_n(z)$ tend uniformément vers $f(z)$ lorsque z est intérieur à A′, c'est-à-dire qu'étant donné à l'avance un nombre ε on peut déterminer un nombre n' tel que l'hypothèse

$$n \geqq n'$$

entraîne

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

quel que soit z à l'intérieur de A′.

Ceci posé, écrivons l'intégrale de Cauchy sous la forme suivante

$$2i\pi f(z) = \int_C \frac{f(x)}{x} \frac{1}{1-\frac{z}{x}} dx,$$

C étant un contour fermé quelconque, entourant l'origine et tel que tous les points singuliers de $f(z)$ lui soient extérieurs.

Il est clair que le point $\frac{z}{x}$ sera intérieur à A′, si le point z est intérieur à une aire que nous pouvons désigner par xA′ et que l'on obtient en multipliant par x chaque point de A′.

Désignons par $\mathfrak{A}'$ l'aire commune à toutes les aires xA′,

---

[1] *Voir* Leau, *Comptes rendus*, octobre 1898. J'ai employé pour la première fois l'intégrale de Cauchy, dans la théorie des séries divergentes, dans mon Mémoire *Sur les séries de Taylor*, etc., cité p. 94; j'ai énoncé le principe général de la méthode dans mon *Mémoire sur les séries divergentes*, p. 64.

lorsque x parcourt le contour C; il résulte de ce qui précède qu'étant donné un nombre positif arbitrairement petit ε, on peut déterminer un nombre n' tel que l'hypothèse

$$n > n'$$

entraîne

$$\left| \frac{1}{1-\frac{z}{x}} - f_n\left(\frac{z}{x}\right) \right| < \varepsilon,$$

quel que soit x sur C et z à l'intérieur de $\mathfrak{A}'$. Dès lors, si l'on suppose z intérieur à $\mathfrak{A}'$ et si l'on remplace $\frac{1}{1-\frac{z}{x}}$ par $f_n\left(\frac{z}{x}\right)$ dans l'intégrale qui définit $f(z)$, il est aisé d'avoir une limite supérieure de l'erreur commise. On aura

$$\left| 2i\pi f(z) - \int_C \frac{f(x)}{x} f_n\left(\frac{z}{x}\right) dx \right| < \mathrm{LM}\varepsilon,$$

en désignant par L la longueur de C et par M le maximum sur C du module de $\frac{f(x)}{x}$. Les nombres L et M étant fixes et ε arbitrairement petit, on a

$$(1) \qquad 2i\pi f(z) = \lim_{n=\infty} \int_C \frac{f(x)}{x} f_n\left(\frac{z}{x}\right) dx,$$

quel que soit z à l'intérieur de $\mathfrak{A}'$. On peut affirmer de plus que le second membre tend *uniformément* vers sa limite. D'ailleurs, de même que A' diffère aussi peu que l'on veut [1] de A, l'aire $\mathfrak{A}'$ diffère aussi peu que l'on veut de l'aire $\mathfrak{A}$ commune à toutes les aires xA. La formule (1) est donc valable à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, mais pour pouvoir affirmer que le second membre tend *uniformément* vers sa limite, il faut remplacer $\mathfrak{A}$ par une aire *finie* et *intérieure* à A.

Si l'on pose

$$f_n(t) = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} t + c_2^{(n)} t^2 + c_3^{(n)} t^3 + \ldots,$$

---

[1] Lorsque les aires s'étendent à l'infini, on doit remplacer le plan par la sphère de Riemann pour entendre le vrai sens de cette expression. Un cercle de rayon R diffère *aussi peu que l'on veut* du plan tout entier, si R est susceptible de croître indéfiniment.

et si l'on remarque que la série $f_n(t)$ étant convergente à l'intérieur de A est uniformément convergente à l'intérieur de A', et par suite la série $f_n\left(\frac{z}{x}\right)$ uniformément convergente lorsque x est sur C et z intérieur à $\mathfrak{A}'$, la formule (1) devient

$$f(z) = \lim_{n=0} \mathrm{F}_n(z),$$

en posant

$$\mathrm{F}_n(z) = c_0^{(n)} \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(x)}{x}\,dx + c_1^{(n)} z \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(x)}{x^2}\,dx + \ldots.$$

Or, si l'on pose

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$

on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{C}} \frac{f(x)}{x^{n+1}}\,dx = v_n,$$

d'où

$$\mathrm{F}_n(z) = c_0^{(n)} u_0 + c_1^{(n)} u_1 z + c_2^{(n)} u_2 z^2 + \ldots.$$

On voit que les $\mathrm{F}_n(z)$ sont déterminées au moyen des nombres fixes $c_p^{(n)}$ qui caractérisent la méthode employée, et des coefficients de $f(z)$.

On aura une aire $\mathfrak{A}$ aussi grande que possible en choisissant le contour C de la manière suivante (*fig.* 16) : traçons autour de

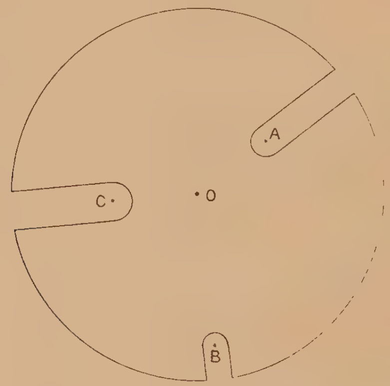

Fig. 16.

chaque point singulier de $f(z)$ un cercle de rayon ε, menons à ce cercle les tangentes parallèles à la droite qui joint ce point singulier à l'origine, et prolongeons ces tangentes, dans la direction

opposée à celle qui va à l'origine, jusqu'à un cercle de rayon R. Dans cette construction, on ne tient pas compte des points singuliers situés à l'extérieur du cercle de rayon R. Le contour C se composera des demi-cercles de rayon ε, situés du côté de l'origine, entre les points de contact des tangentes, des portions de tangentes comprises entre le point de contact et le cercle de rayon R et des arcs de ce dernier cercle qui ne sont pas compris entre deux tangentes à un même cercle de rayon ε. Nous avons fait la figure dans le cas de trois points singuliers A, B, C.

Il est aisé de voir que, en supposant ε assez petit et R assez grand, l'aire $\mathfrak{A}$ diffère aussi peu que l'on veut (¹) de l'aire S commune aux régions yA, en désignant par y les divers points singuliers de $f(z)$. La méthode s'applique d'ailleurs pour tous les points intérieurs à S ; elle s'applique uniformément pour les points intérieurs à une aire finie S′ intérieure à S ; *mais on ne peut pas affirmer qu'elle ne s'applique pas pour les points extérieurs à* S. C'est pourquoi nous avons employé, pour établir l'existence du polygone de sommabilité, une autre méthode plus longue, mais plus précise. Celle-ci conduirait immédiatement à cette notion ; il suffit de poser

$$f(z) = \lim_{n=\infty} \int_0^n e^{-a} e^{az}\, da,$$

c'est-à-dire de prendre

$$f_n(z) = \int_0^n e^{-a} e^{az}\, da\,;$$

c'est une fonction entière de z.

On aura, dès lors,

$$\mathrm{F}_n(z) = \int_0^n e^{-a}\, \mathrm{F}(az)\, da,$$

$\mathrm{F}(az)$ étant la fonction entière associée à $f(z)$; et, par suite, dans l'aire S,

$$f(z) = \lim_{n=0} \int_0 e^{-a}\, \mathrm{F}(az)\, da = \int_0^\infty e^{-a}\, \mathrm{F}(az)\, da.$$

L'aire S est d'ailleurs aisée à déterminer ; l'aire A se compose

(¹) *Voir* la note de la page 199. L'aire $\mathfrak{A}$ est toujours finie ; l'aire S peut s'étendre à l'infini.

évidemment des points pour lesquels on a

$$\text{partie réelle de } z < 1\,;$$

et, en construisant les aires yA, on obtient le polygone de sommabilité; c'est ainsi que j'en ai démontré, pour la première fois, l'existence.

Mais nous ne nous étendrons pas sur ces démonstrations de résultats déjà obtenus d'une manière plus complète; remarquons seulement que nous avons déjà développé au n° 43 *bis*, des considérations du même genre.

Une remarque importante est la suivante. Au lieu d'écrire

$$\frac{1}{1-z} = \lim_{n=\infty} f_n(z),$$

on peut écrire

$$\frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty g_n(z),$$

en posant

$$g_0(z) = f_1(z),$$
$$g_n(z) = f_{n+1}(z) - f_n(z) \qquad (n > 0).$$

Si d'ailleurs on écrit

$$g_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + a_2^{(n)} z^2 + \ldots,$$

et si l'on pose

$$G_n(z) = F_{n+1}(z) - F_n(z),$$
$$G_0(z) = F_1(z),$$

on aura

$$G_n(z) = a_0^{(n)} u_0 + a_1^{(n)} u_1 z + a_2^{(n)} u_2 z^2 + \ldots$$

et

$$f(z) = \sum_0^\infty G_n(z),$$

la série étant convergente dans S et uniformément convergente dans toute aire finie S′ intérieure à S.

Avant de passer à l'étude des cas où la méthode précédente donne des résultats aussi généraux que ceux de M. Mittag-Leffler, nous allons établir une formule particulièrement simple, que l'on obtient en prenant pour $\frac{1}{1-z}$ l'un des développements que fournit la série de Taylor. On a

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-(1+z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}(1+z) + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}(1+z)^n + \ldots.$$

Le $n^{\text{ième}}$ terme de cette série s'écrit, en désignant par C_n^p les coefficients binomiaux,

$$\frac{1}{2^{n+1}}(1 + C_n^1 z + C_n^2 z^2 + \ldots + C_n^p z^p + \ldots C_n^n z^n).$$

Dès lors, soit

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

la série de Taylor proposée, dont le rayon de convergence n'est ni nul ni infini. En posant

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}}(a_0 + C_n^1 a_1 z + \ldots + C_n^p a_p z^p + \ldots + C_n^n a_n z^n);$$

le développement

$$f(z) = \sum P_n(z)$$

est convergent dans une région aisée à déterminer d'après ce qui précède, région qui dépasse le cercle de convergence en tout point non singulier sans toutefois recouvrir entièrement l'étoile.

Nous arrivons maintenant à l'étude des cas où la méthode précédente donne un développement valable dans toute l'*étoile*. Pour cela, il est *nécessaire et suffisant* que la région A comprenne tout le plan, sauf la droite $(1, +\infty)$, c'est-à-dire les valeurs z réelles et supérieures à un (¹).

Or, M. Runge (²) a montré que l'on pouvait obtenir pour $\frac{2}{1-z}$ un développement satisfaisant à la condition précédente et M. Painlevé (³) a donné d'autres procédés pour obtenir de tels

---

(¹) La série $\sum g_n(z)$ ne peut converger uniformément dans une région annulaire entourant le point $z = 1$, d'après une proposition bien connue.

(²) *Acta mathematica*, t. VI. *Voir* aussi mes *Leçons sur les fonctions monogènes*, Chap. II.

(³) *Comptes rendus*, 1898. Indiquons aussi que M. Painlevé (*Comptes rendus*, 25 mai 1899) a montré que l'on peut déduire, de certains développements obtenus par lui dans le cas des variables réelles, des séries ayant les mêmes propriétés que celles de M. Mittag-Leffler. Enfin, M. Hilbert avait aussi développé en séries de polynomes les fonctions analytiques dans une aire connexe quelconque (*Göttinger Nachrichten*, 6 mars 1897).

développements. Soit

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{0}^{\infty} g_n(z) \tag{1}$$

un développement de M. Runge, de M. Hilbert ou de M. Painlevé ; les $g_n(z)$ sont des polynomes ; la série converge dans tout le plan, sauf pour les valeurs réelles de z supérieures à *un* et converge *uniformément* dans toute région *finie* A′ intérieure à sa région de convergence.

Dès lors, *si l'on pose*

$$g_n(z) = \sum_{p=0}^{p=k_n} c_p^{(n)} z^p,$$

$$\gamma_p^{(n)} = u_p c_p^{(n)},$$

$$G_n(z) = \sum_{p=0}^{p=k_n} \gamma_p^{(n)} z^p,$$

la série

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} G_n(z) \tag{2}$$

convergera dans toute l'étoile, la convergence étant uniforme dans toute région finie intérieure à l'étoile.

On peut d'ailleurs choisir les $g_n(z)$ de manière que la convergence de la série (1) soit *absolue;* il en sera alors visiblement de même pour la série (2) ; nous ferons cette hypothèse, pour simplifier les démonstrations ultérieures, bien qu'elle ne soit pas indispensable (¹).

La proposition précédente offre l'avantage de faire connaître une infinité de développements analogues à celui de M. Mittag-Leffler; mais cet avantage restera assez mince, tant que ces développements seront plus compliqués que celui de M. Mittag-Leffler, c'est-à-dire tant qu'on n'aura pas perfectionné suffisamment les méthodes de MM. Runge et Painlevé pour obtenir des coefficients $c_p^{(n)}$ dont la loi soit simple.

82 *bis.* Mais nous allons voir que la méthode que nous venons

---

(¹) *Voir*, à ce sujet, Borel, *Addition au Mémoire sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta mathematica*, p. 383).

d'exposer, en mettant en évidence le caractère *distributif* (¹) de la formation des séries, suggère naturellement l'idée de considérations qui vont nous conduire à des résultats dignes d'intérêt.

Nous allons d'ailleurs étudier seulement sur un cas particulier une proposition qui s'étend à des cas bien plus généraux (²). Nous supposerons que l'on a choisi un développement bien déterminé

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{0}^{\infty} g_n(z),$$

$$g_n(z) = \sum_{0}^{kn} c_p^{(n)} z^p$$

absolument et uniformément convergent dans toute aire A′ (fin du n° 82).

Soit dès lors

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{z - e^{2i\pi n\sqrt{2}}} \tag{3}$$

une série de fractions rationnelles; la série $\Sigma\,|A_n|$ est supposée convergente. La fonction $f(z)$ est visiblement holomorphe à l'intérieur du cercle C de rayon *un*; elle admet un développement de Taylor

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$

dont le rayon de convergence est au moins égal à un. D'ailleurs les points $e^{2i\pi n\sqrt{2}}$ sont évidemment denses sur tout le cercle C et, dès lors, l'hypothèse de la convergence de la série $\Sigma\,|A_n|$ entraîne non seulement que le cercle C est bien le cercle de convergence de $f(z)$, mais encore que $f(z)$ admet ce cercle comme coupure (³).

(¹) *Voir* les intéressants travaux de M. Pincherle et notamment son Mémoire *Sur le calcul fonctionnel distributif* (*Math. Annal.*, t. XLIX, p. 325). Il serait intéressant de rapprocher les idées de M. Pincherle de celles qui sont exposées dans ce Livre; je le ferai peut-être un jour; pour le moment, je renverrai simplement au Livre de M. Hadamard cité n° 70.

(²) *Voir* Borel, *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta mathematica*, t. XXIV, p. 309).

(³) Ce fait n'est pas évident *a priori* : de ce que les $a_n = e^{2\pi i n\sqrt{2}}$ sont des pôles de nos fractions, il ne résulte pas qu'ils soient des points singuliers de $f(z)$: une compensation pourrait en effet se produire outre le terme $\frac{A_n}{z - a_n}$ et les termes provenant de pôles qui tendent vers a_n. Voir : *Leçons sur les fonctions monogènes d'une variable complexe*, p. 56-57.

L'étoile A relative à $f(z)$ se réduit donc à l'aire du cercle C, et il semble que la transformation en série de polynomes ne puisse donner rien de plus que la série de Taylor. Posons cependant

$$\gamma_p^{(n)} = u_p c_p^{(n)},$$

$$G_n(z) = \sum_0^{kn} \gamma_p^{(n)} z^p,$$

$$f(z) = \sum_0^{\infty} G_n(z). \tag{4}$$

Nous allons voir que, si l'on choisit convenablement les nombres A_n, *cette dernière série convergera en des points extérieurs au cercle* C.

Dans ce but, marquons sur le cercle C tous les points $e^{2\pi i n\sqrt{2}}$; considérons chacun de ces points comme le milieu d'un arc D_n de longueur $\frac{\pi}{n^3}$; la somme des longueurs des arcs D_n est égale à

$$\pi\left[1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots\right] < 2\pi,$$

c'est-à-dire inférieure à la longueur totale de la circonférence; il y a donc sur la circonférence une infinité de points n'appartenant à aucun de ces arcs [1]. Soit M l'un de ces points; nous allons prouver que l'on peut choisir les A_n tels que, si l'on prolonge le rayon OM au delà de M, *la série* (4) *converge absolument sur toute la demi-droite* D *ainsi obtenue. Elle converge, de plus, uniformément sur tout segment fini de cette droite, et sa somme est d'ailleurs égale à celle de la série* (3).

Pour démontrer cette proposition, traçons un cercle Γ ayant pour centre l'origine et pour rayon un nombre quelconque $R > 1$; nous démontrerons la convergence absolue et uniforme de la

(1) Cette proposition peut paraître évidente; on en trouvera une démonstration rigoureuse dans mes premières *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 41-43. On peut montrer aussi qu'il y a sur tout arc de la circonférence une infinité non dénombrable de points qui n'appartiennent qu'à un *nombre limité* des segments D_n. Ceux de ses points qui ne coïncident avec le milieu d'aucun des arcs D_n, ont la même propriété que le point M du texte.

série (4) sur la portion δ de la demi-droite D intérieure à ce cercle.

Considérons l'aire A'_n définie de la manière suivante : soient Δ, Δ_1 les demi-droites dont les points ont respectivement pour arguments

$$-\frac{\pi}{2n^3}, \quad +\frac{\pi}{2n^3}.$$

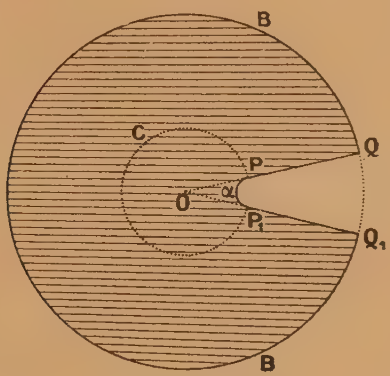

fig. 16 *bis.*
(A'_n = aire hachurée).

Soient P et P_1 les points d'intersection de ces demi-droites avec C, Q et Q_1 leurs points d'intersection avec Γ. Traçons un cercle γ tangent à Δ et Δ_1 en P et P_1; soit α celui des arcs PP_1 de γ qui est inférieur à π; soit B celui des arcs QQ_1 de Γ qui est supérieur à π. L'aire A'_n que nous voulons définir est délimitée par la droite PQ, l'arc B, la droite Q_1P_1, l'arc α. La série

$$\frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty g_m(z)$$

étant absolument et uniformément convergente à l'intérieur de A'_n, il existe un nombre M_n tel que l'on ait, quel que soit z à l'intérieur de A'_n,

$$\sum_0^\infty |g_n(z)| < M_n.$$

Nous choisirons les nombres A_n de telle manière que la série

$$\Sigma\,|A_n|\,M_n$$

soit convergente ; il suffira par exemple de prendre

$$|A_n| \leqq \frac{M_n}{n^2}.$$

Considérons maintenant la série

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - e^{2\pi i n\sqrt{2}}}, \tag{3}$$

que l'on peut écrire

$$f(z) = \sum \frac{B_n}{1 - z\,e^{-2\pi i n\sqrt{2}}} \tag{3'}$$

en posant

$$B_n = -A_n\,e^{-2\pi i n\sqrt{2}}.$$

On a, d'ailleurs,

$$|B_n| = |A_n|.$$

Chacun des termes de la série $(3')$ peut être développé, comme $\frac{1}{1-z}$, de sorte que l'on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \left[\sum_{m=0}^{m=\infty} g_m\left(z\,e^{-2\pi i n\sqrt{2}}\right) \right]. \tag{5}$$

Tout revient à démontrer que l'on peut intervertir l'ordre des sommations dans la série double ; or, il est manifeste que, lorsque z est situé sur le segment δ, le point $ze^{-2\pi i n\sqrt{2}}$ est intérieur à l'aire A′ et que l'on a, par suite,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| g_m\left(z\,e^{-2\pi i n\sqrt{2}}\right) \right| < M_n.$$

Il en résulte que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} |B_n| \left[\sum_{m=0}^{m=\infty} \left| g_m\left(z e^{-2\pi i n\sqrt{2}}\right) \right| \right],$$

obtenue en remplaçant dans (5) chaque terme par sa valeur

absolue, est convergente, puisque la série

$$\Sigma \mid B_n \mid M_n$$

l'est; donc la série double (5) est *absolument* convergente et l'on peut écrire

$$f(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n g_m \left(ze^{-2\pi i n\sqrt{2}}\right) \right].$$

ou, en posant

$$\sum_{n=1}^{8} B_n g_m\left(ze^{-2\pi i n\sqrt{2}}\right) = G_m(z),$$

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} G_m(z).$$

Nous laisserons à nos lecteurs le soin de démontrer que les polynomes $G_m(z)$ coïncident avec ceux qui ont été définis au n° 82, et aussi que la convergence est uniforme. Ces démonstrations ne présentent aucune difficulté; on les trouvera d'ailleurs dans notre Mémoire *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta Math.* t. XXIV, p. 309). Nous devons aussi renvoyer à ce Mémoire pour les conséquences de la proposition précédente au point de vue de la théorie générale des fonctions analytiques, conséquences étrangères à notre sujet actuel.

Les développements de M. Mittag-Leffler et la théorie générale des séries divergentes. — Conclusions.

83. Nous donnerons le nom générique de *développements de Mittag-Leffler*, ou, pour abréger, de *développements* (M), à tous les développements dont nous venons de démontrer l'existence et qui convergent dans toute l'étoile A. D'ailleurs, lorsque l'on parlera d'un développement (M), il faudra évidemment supposer que l'on a fait choix d'un développement bien déterminé, qui restera le même dans tout le raisonnement; ce développement pourra d'ailleurs être choisi arbitrairement parmi l'infinité de développements (M) possibles.

La proposition qui termine le paragraphe précédent entraîne la conséquence suivante : *Un développement* (M) *est toujours, pour*

un choix convenable de la fonction $f(z)$, convergent en dehors de l'étoile A *qui correspond à cette fonction.* Par conséquent l'emploi des développements (M), qui semblait au premier abord ne pouvoir rien donner de plus que la théorie du prolongement analytique, conduit à certains résultats dans des cas où cette théorie n'est pas applicable : *cet emploi se rattache par là à la théorie des séries divergentes.*

En effet, les procédés qui permettent seulement de sommer des séries divergentes dont la somme serait fournie aisément par la théorie du prolongement analytique (*voir* n° 62) ne peuvent être considérés comme constituant une véritable théorie des séries divergentes; ce sont simplement des transformations plus ou moins élégantes de la théorie du prolongement analytique; telles sont les théories développées dans le Chapitre V; tel est aussi le théorème de Mittag-Leffler, sous sa forme primitive. D'ailleurs ces transformations peuvent être de la plus grande importance dans les applications; mais, au point de vue de la théorie générale des fonctions, elles ne sauraient nous apprendre rien de plus que la théorie dont elles sont issues.

Il n'en est pas de même des méthodes qui permettent soit d'obtenir la somme d'une série de Taylor à rayon de convergence fini dans une direction suivant laquelle le prolongement analytique est impossible; soit d'obtenir, dans une région quelconque, la somme d'une série de Taylor à rayon de convergence nul.

Nous avons déjà vu que les développements de Mittag-Leffler permettent d'atteindre le premier de ces résultats; ils permettent aussi d'atteindre le second.

Soit

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z + a_n}$$

une série de fractions rationnelles; nous supposons que les a_n sont des nombres *positifs* qui tendent vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Les a_n étant donnés, il est évidemment possible de choisir les A_n de manière que la série $f(z)$ et toutes ses dérivées convergent pour $z = 0$; il suffit de supposer, par exemple

$$|A_n| < e^{-\frac{1}{a_n}}.$$

Les A_n étant ainsi choisis, désignons par $f^{(p)}(0)$ la valeur que prend la série $f^{(p)}(z)$ lorsqu'on y fait $z = 0$ et posons

$$u_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}.$$

La série

$$f_1(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \ldots$$

sera, en général [1], divergente. Plaçons-nous dans le cas où elle l'est effectivement et formons le développement (M) correspondant

$$f_1(z) = \sum_0^\infty G_n(z),$$

$$G_n(z) = \sum_0^{k_n} c_p^{(n)} u_p z^p.$$

On peut choisir les nombres A_n *de telle manière que ce développement* (M) *converge dans tout le plan, sauf pour les valeurs réelles négatives de* z; *il est alors, en chaque point, égal à la série* $f(z)$.

Cette proposition se démontre très aisément, par des considérations tout à fait semblables à celles qui terminent le paragraphe précédent; il est donc inutile de détailler ici cette démonstration qui ne nous apprendrait rien de nouveau; nous renverrons au Mémoire cité les lecteurs qui préféreront ne pas la reconstituer eux-mêmes.

83 *bis*. La théorie des développements (M) permet donc de sommer des séries divergentes, d'une manière indépendante de la théorie du développement analytique; peut-on en conclure qu'elle constitue une véritable théorie des séries divergentes, susceptible, *à ce titre*, d'applications ?

Nous avons déjà insisté à diverses reprises sur l'importance qu'il y a, lorsque l'on considère plusieurs séries divergentes, à pouvoir les combiner entre elles par voie d'addition et de multi-

---

(1) C'est-à-dire si les a_n et les A_n sont *quelconques*. D'une manière plus précise, il est possible, les a_n étant donnés, de déterminer des nombres A_n, satisfaisant aux inégalités précédentes et tels que la série $f_1(z)$ soit divergente. Ce résultat, aisé à établir, suffit pour justifier toutes nos considérations sur $f(z)$ et $f_1(z)$.

plication; à pouvoir aussi, si les termes sont fonctions d'une variable, les différentier et les intégrer.

Or, il est clair qu'au sujet des développements (M), on peut énoncer le théorème suivant :

Soient

$$(1)\qquad f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$

$$(2)\qquad g(z) = v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \ldots,$$

deux séries de Taylor à rayon de convergence fini; soit $z = z_0$ *un point tel que le segment qui le joint à l'origine ne renferme aucun des points singuliers de ces deux fonctions; on pose*

$$(3)\qquad \alpha_p^{(n)} = u_p c_p^{(n)},$$

$$(4)\qquad \beta_p^{(n)} = v_p c_p^{(n)},$$

les constantes $c_p^{(n)}$ *ayant le même sens que plus haut; puis*

$$F_n(z) = \sum_{p=0}^{p=k_n} \alpha_p^{(n)} z^p,$$

$$G_n(z) = \sum_{p=0}^{p=k_n} \beta_p^{(n)} z^p,$$

et l'on considère les deux développements (M),

$$(5)\qquad f(z_0) = \sum_0^\infty F_n(z_0),$$

$$(6)\qquad g(z_0) = \sum_0^\infty G_n(z_0).$$

On a

$$(7)\qquad f(z_0)\,g(z_0) = \sum_0^\infty H_n(z_0),$$

en posant

$$H_n(z) = \sum_{p=0}^{p=k_n} \gamma_p^{(n)} z^p,$$

$$(8)\qquad \gamma_p^{(n)} = w_p c_p^{(n)},$$

$$(9)\qquad w_p = u_0 v_p + u_1 v_{p-1} + u_2 v_{p-2} + \ldots + u_p v_0.$$

Les formules (3) et (4) permettent d'ailleurs d'exprimer les $\varphi_p^{(n)}$

au moyen seulement des $\alpha_p^{(n)}$, des $\beta_p^{(n)}$ et des $c_p^{(n)}$ qui sont des données fondamentales dans la question. On obtient aisément avec (3), (4), (8) et (9) :

$$(10)\qquad \gamma_p^{(n)} = \frac{1}{c_p^{(n)}}[\alpha_0^{(n)}\beta_p^{(n)} + \alpha_1^{(n)}\beta_{p-1}^{n} + \ldots + \alpha_p^{(n)}\beta_0^{(n)}].$$

La formule (7) donne donc l'expression du produit des deux séries (M) (5) et (6) au moyen seulement des coefficients de ces séries. On peut dire que la formule (10) est la *formule fondamentale* [1] *de multiplication des fonctions* (M) *définies par les constantes* $c_p^{(n)}$.

La proposition qui a été énoncée exprime que cette formule est applicable dans un cas déterminé; cette proposition est d'ailleurs évidente : car la fonction $f(z)g(z)$ n'admettant pas d'autres points singuliers que ceux de $f(z)$ et de $g(z)$, le développement (M) correspondant à ce produit converge pour $z = z_0$, ce qui donne la formule (7).

Mais la question importante serait de savoir si la règle de multiplication qui vient d'être formulée peut s'étendre à d'autres cas qu'à celui-ci, où elle est à peu près inutile pour les raisons même qui la rendent évidente.

Il ne serait pas malaisé de démontrer que, si l'on considère deux séries $f(z)$ et $g(z)$ définies par des séries de fractions rationnelles

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n},$$
$$g(z) = \sum \frac{B_n}{z - b_n},$$

et ayant, soit les propriétés de la série étudiée n° 82 *bis*, soit les propriétés de la série signalée à la fin du n° 83, la règle de multiplication s'applique à ces séries sur toute droite sur laquelle on sait démontrer leur convergence uniforme.

Mais ici encore on se trouve en présence de fonctions définies autrement que par les séries divergentes, et dont il est aisé d'ob-

---

[1] Il n'y a pas à s'arrêter au cas où, dans cette formule, $c_p^{(n)}$ est nul pour certaines valeurs de n et de p; pour ces valeurs $\alpha_p^{(n)}$, $\beta_p^{(n)}$, $\gamma_p^{(n)}$ sont aussi nuls.

tenir le produit directement, en multipliant entre elles les deux séries de fractions rationnelles.

Ce qui serait nécessaire, ce serait de prouver que, si l'on a deux séries divergentes dont on ne connaît pas l'origine, et que l'on peut sommer en les transformant en développements (M), sans que la théorie du prolongement analytique permette de rendre compte de ce fait, la règle de multiplication s'applique à ces séries. Il faudrait, tout au moins, montrer qu'il en est ainsi dans des cas étendus à définir d'une manière précise.

Tant qu'on n'aura pas démontré cette proposition [1], *la théorie des développements* (M) *ne sera pas une théorie des séries divergentes*. En effet, ce qu'on doit demander à une théorie des séries divergentes, c'est d'abord d'attribuer une somme à des séries qui n'en avaient point; or, toutes les séries que permet de sommer la théorie des développements (M) ont une somme déjà connue, soit par la théorie du prolongement analytique, soit par le calcul direct des séries de fractions rationnelles qui ont fourni la série divergente.

De plus, une théorie des séries divergentes doit permettre, par des calculs effectués sur de telles séries, de démontrer des résultats qui, énoncés ensuite indépendamment de toute introduction de séries divergentes, constituent des propositions rigoureuses, se rattachant à des théories classiques. Tels sont les résultats obtenus dans les Chapitres I, II, III, relativement à l'application aux équations différentielles de trois théories des séries divergentes : la théorie de H. Poincaré, la théorie de Stieltjes généralisée, et la théorie des séries absolument sommables.

Or, pour que ces applications soient possibles, il est nécessaire, comme H. Poincaré a été le premier à le montrer pour les séries asymptotiques, que les règles du calcul puissent être appliquées aux séries divergentes étudiées; nous avons vu qu'il n'en est pas ainsi pour les développements (M), sauf dans les cas où il est plus commode de se passer de l'intermédiaire des séries divergentes.

Ainsi, *la théorie des développements* (M) *ne constitue pas actuellement une théorie des séries divergentes*. Nous avons

---

[1] Nous laissons de côté, pour abréger, les propositions analogues relatives à l'intégration et à la différentiation.

cependant tenu à donner à cette théorie une large place dans ce Livre, car nous espérons fermement qu'au prix peut-être de quelques restrictions et de quelques modifications, n'en altérant pas le caractère essentiel, on pourra en déduire une théorie générale des séries divergentes.

Aussi, ne faudrait-il pas croire que les remarques précédentes soient inspirées par le désir de diminuer l'importance de la théorie des développements de M. Mittag-Leffler; nul plus que moi n'est persuadé de cette importance; ces remarques sont destinées, au contraire, à provoquer des recherches de nature à augmenter encore la place, déjà très considérable, que cette théorie nouvelle occupe dans la théorie des fonctions.

Il est en effet bien probable que, le jour où l'on serait arrivé à déduire, de la théorie des séries de M. Mittag-Leffler, une théorie générale des séries divergentes, cette théorie générale aurait la plus grande influence sur les progrès de l'Analyse dans diverses directions. Elle comprendrait d'ailleurs, vraisemblablement, comme cas particuliers, les diverses théories des séries divergentes que nous avons développées ou esquissées dans ce Livre; ces théories particulières disparaîtraient alors, fondues dans la théorie générale.

Leur étude n'aurait cependant pas été inutile, car c'est le plus souvent l'étude approfondie des cas particuliers simples qui met sur la voie de la méthode à suivre pour traiter les cas les plus généraux.

CHAPITRE VI (APPENDICE).

LE DÉVELOPPEMENT MODERNE DE LA THÉORIE DES SÉRIES DIVERGENTES.

84. Il nous a été impossible, au cours de la rédaction de cet Ouvrage, de mentionner beaucoup de travaux importants, suscités par les recherches de M. Émile Borel et par ses beaux résultats. Pour mesurer l'influence qu'il a exercée, il suffit de consulter l'Ouvrage de M. Lloyd L. Smail, intitulé *History and Synopsis of the Theory of summable infinite Processes* et publié par l'Université d'Orégon (février 1925), où l'auteur analyse les principaux Mémoires consacrés aux séries et aux intégrales divergentes depuis 1880 jusqu'à 1923. A partir de 1895, date d'apparition de la première Note de M. Émile Borel sur ce sujet (sommation par les fonctions entières et notamment par e^x), on constate un énorme accroissement des productions consacrées à la sommabilité.

Nous allons essayer ici de combler très brièvement quelques lacunes : nous nous bornerons souvent à énoncer les résultats d'importance essentielle, en renvoyant, pour les démonstrations, aux Mémoires originaux. Pour bien délimiter notre sujet, nous nous en tiendrons au problème des séries divergentes, en laissant de côté des sujets connexes et notamment l'étude des intégrales divergentes (à ce propos, *voir* les indications des exercices 13, 14, 15).

85. *Le principe des facteurs de convergence.* — Au cours du Chapitre III, en abordant l'étude des procédés de sommation, nous avons insisté sur le fait suivant : à côté du principe des moyennes, qui a joué dans notre exposé un rôle prépondérant, on peut faire appel à d'autres processus sommatoires : nous avons cité

notamment *le principe des facteurs de convergence* (n° 34) [1]. On peut y rattacher un grand nombre de travaux dont nous avons parlé. En fait, le parti que M. Le Roy a tiré de ce principe, au début de son Mémoire des *Annales de Toulouse* (1900), était bien de nature à encourager de telles recherches.

Considérons d'abord la progression géométrique $\sum_0^\infty z^n$. Posons

$$G_t(z) = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} z^n,$$

si t a une valeur positive inférieure à l'unité, on voit par la formule de Stirling que $G_t(z)$ est une fonction entière, à laquelle on

---

(1) Ce principe n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la convention générale suivante, énoncée explicitement par M. G. Hardy : supposons que l'expression

$$\lim_{x=\alpha}\left[\lim_{y=\beta} \varphi(x, y)\right]$$

ait un sens, et que sa valeur soit λ; dans le cas où l'expression

$$\lim_{y=\beta}\left[\lim_{x=\alpha} \varphi(x, y)\right]$$

n'a pas de sens (bien que le crochet soit défini), nous conviendrons de dire que λ est sa *limite généralisée.*

Exemples : 1° Soit la série $1-1+1-1+\ldots$. Substituons à la variable y, qui tendait vers β, un entier n croissant indéfiniment, et posons

$$\varphi_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n.$$

Nous avons

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \lim_{x=1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\lim_{x=1}\left[\lim_{n=\infty} \varphi_n(x)\right] = \frac{1}{2}.$$

Nous posons, suivant la convention de G. Hardy

$$\lim_{n=\infty}\text{gén}\left[\lim_{x=1} \varphi_n(x)\right] = \frac{1}{2}.$$

On pourrait répéter ce qui précède chaque fois qu'une fonction $f(x)$ continue et bien déterminée en un point de son cercle de convergence, donne naissance à une série indéterminée en ce point. Or, on voit précisément que $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ jouent précisément, à cette occasion, le rôle de facteurs de convergence. On généraliserait facilement.

2° On peut rattacher à ce même ordre d'idées la méthode intégrale de M. Borel.

peut aussi donner par un calcul immédiat (où n'intervient que la définition classique de la fonction Γ), la forme

$$G_t(z) = \int_0^\infty e^{-x+zx^t}\,dx.$$

On démontre alors facilement que dans l'étoile rectiligne de la fonction $\frac{1}{1-z}$ prise relativement au point o, c'est-à-dire dans le plan armé d'une coupure suivant la demi-droite $(1, +\infty)$ de l'axe réel, on a

$$\lim_{t=1} G_t(z) = \frac{1}{1-z},$$

la convergence étant uniforme dans tout domaine fini du plan de

---

Elle consiste en effet à définir la somme de la série Σu_n par l'intégrale

$$(1)\qquad \int_0^\infty e^{-a}\left(u_0 + \frac{u_1 a}{1} + \frac{u_2 a^2}{1.2} + \frac{u_3 a^3}{1.2.3} + \ldots\right) da$$
$$= \lim_{L=\infty}\left[\lim_{n=\infty}\int_0^L e^{-a}\,U_n(a)\,da\right],$$

où l'on pose

$$U_n(a) = u_0 + \frac{u_1 a}{1} + \ldots + \frac{u_n a^n}{n!}.$$

Or, en intervertissant les limites, nous obtiendrons

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty}\left[\lim_{L=\infty}\int_0^L e^{-a}\,U_n(a)\,da\right] = \lim_{n=\infty}\left[\int_0^\infty e^{-a}\,U_n(a)\,da\right],$$

ce qui nous ramène, sous le crochet, à la somme des n premiers termes de la série donnée; donc inversement en partant de cette somme, la faisant précéder du symbole $\lim\limits_{n=\infty}$, ce qui nous donne le premier membre de (2), il nous suffira d'effectuer l'interversion des limites pour retrouver l'intégrale de M. Borel.

Plus généralement, soit $\varphi(a)$ une fonction monotone positive, lorsque a croît de o à $+\infty$, telle que toutes les intégrales

$$c_n = \int_0^\infty \varphi(a)\,a^n\,da$$

soient convergentes. On pourra appeler, avec M. Bromwich, somme généralisée de la série Σu_n l'expression

$$\int_0^\infty \varphi(a)\left(\sum_0^\infty \frac{u_n}{c_u} a^n\right) da$$

(Chap. XI de l'Ouvrage : *An introduction to the theory of infinite series*, London, Mac Millan, 1908).

la variable z, tel que la distance d'un de ses points à la demi-droite précédente ait une borne inférieure non nulle.

Il suffit alors de reprendre un raisonnement employé au n° 82 pour établir la possibilité de développer $\frac{1}{1-z}$ en une série de polynomes uniformément convergente dans tout domaine du genre indiqué. En outre, en vertu du processus distributif qui, par l'intermédiaire de l'intégrale de Cauchy, permet de passer de la fonction $\frac{1}{1-z}$ à une fonction analytique quelconque, on parvient avec M. Le Roy au résultat suivant :

Étant donnée la fonction $f(z)=\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ *holomorphe autour de l'origine, l'expression*

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)}\alpha_n z^n$$

représente pour t positif et moindre que l'unité, une fonction entière de z. Lorsque t tend vers 1, *cette fonction entière tend uniformément vers* $f(z)$ *dans tout domaine fini tel que la distance de l'un de ses points à la frontière de l'étoile rectiligne de* $f(z)$ (prise relativement au point 0), *reste supérieure à un nombre fixe.*

Ainsi, grâce à l'introduction des facteurs de convergence

$$\frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)},$$

M. Le Roy retrouve, par un raisonnement simple et directement inspiré des idées de M. Borel (Chap. V), le théorème de Mittag-Leffler. On voit que la sommation de M. Le Roy, pour une série quelconque, consistera à prendre [1]

$$\lim_{t=1}\left[\lim_{n=\infty}\sum_0^n \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)}u_n\right].$$

---

[1] Cette définition est bien encore le résultat d'une interversion de limites. On peut montrer directement que la somme au sens de M. Le Roy coïncide avec

86. On était donc conduit, d'une manière naturelle, à se poser des questions d'un type général, s'apparentant à celles que nous avons examinées déjà, à propos du principe des moyennes (n° 42 et suivants). Citons les suivantes :

1° Comment faudra-t-il choisir les facteurs de convergence pour être assuré que la condition de permanence est satisfaite ? S'il en est ainsi, nous dirons encore que nous avons une méthode régulière de sommation.

2° A supposer qu'on ait deux procédés de sommation réguliers, provenant chacun d'une suite particulière de facteurs de convergence, à quelle condition ces procédés seront-ils concordants?

Voici la réponse que M. Oscar Perron a proposée en 1920, dans un article de la *Mathematische Zeitschrift* [1], à la première de ces questions :

Soit la suite de fonctions $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, ..., $\Phi_\nu(x)$..., *qui satisfont aux deux hypothèses suivantes :*

$$\text{(A)} \qquad \lim_{x \to \infty} \Phi_\nu(x) = 1,$$

$$\text{(B)} \qquad \sum_0^\infty |\Phi_\nu(x) - \Phi_{\nu+1}(x)| \leq M,$$

où M *est un nombre indépendant de* x. *Alors, si* $\sum_0^\infty a_n$ *converge et a pour somme* S, *la série* $\sum_0^\infty a_\nu \Phi_\nu(x)$ *converge également, et sa somme* $\Psi(x)$ *tend vers* S *quand* x *tend vers* ∞.

En effet, au moyen de la transformation d'Abel, nous pouvons écrire

$$\text{(1)} \qquad \sum_0^n a_\nu \Phi_\nu(x) = \sum_0^n [\Phi_\nu(x) - \Phi_{\nu+1}(x)] S_\nu + \Phi_{n+1}(x) S_n;$$

l'intégrale de M. Borel, là où elle existe; mais quand on applique les deux méthodes aux séries entières, il est bien évident qu'il y a coïncidence à l'intérieur du polygone de sommabilité. Pour la comparaison directe, *voir* Bromwich (*loc. cit.*), London, Mac Millan, 1908.

[1] Tome VI, p. 286-310 (*voir* la note complémentaire p. 250).

en vertu de (B), la série $\Sigma[\Phi_\nu - \Phi_{\nu+1}]$ est absolument convergente, et puisque les S_ν ont une limite, il en sera de même de la série au second membre de (1); (B) exige en outre que $\Phi_{n+1}(x)$ tende vers une fonction limite, et par suite, la convergence de la série $\Sigma a_\nu \Phi_\nu$ est établie.

Reste à montrer que sa somme tend bien vers S pour x infini. La relation (1) peut en effet s'écrire

$$\sum_0^n a_\nu \Phi_\nu(x) = \sum_0^n (\Phi_\nu - \Phi_{\nu+1}) S_\nu + S_n \left[\Phi_0 - \sum_0^n (\Phi_\nu - \Phi_{\nu+1})\right]$$

en passant à la limite lorsque n croît indéfiniment, il vient alors

$$\Psi(x) = S\Phi_0 + \sum_0^\infty (\Phi_\nu - \Phi_{\nu+1})(S_\nu - S).$$

Le théorème sera établi si nous prouvons que la série au second membre tend vers zéro quand x tend vers x_0. Or, cette série peut s'écrire

$$(2) \qquad \sum_0^n (\Phi_\nu - \Phi_{\nu+1})(S_\nu - S) + \sum_{n+1}^\infty (\Phi_\nu - \Phi_{\nu+1})(S_\nu - S);$$

étant donné ε positif arbitraire, on peut déterminer n de manière que $\nu > n$ entraîne

$$|S_\nu - S| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

et alors, en vertu de (B), le second terme de (2) sera moindre en valeur absolue que $\frac{\varepsilon}{2}$, quel que soit x. Ayant ainsi déterminé n, on peut, d'après (**A**), prendre x assez grand pour que le premier terme soit lui-même inférieur, en module, à $\frac{\varepsilon}{2}$, ce qui démontre le théorème.

86 *bis*. Notamment, si nous avons quel que soit ν

$$0 \leqq \Phi_{\nu+1}(x) \leqq \Phi_\nu(x) \leqq 1,$$

la condition (B) sera toujours satisfaite. Il en sera précisément

ainsi, dans les exemples suivants, proposés par M. Oscar Perron.

I. On prend

$$\Phi_\nu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\nu}{x} & \text{pour} \quad \nu < x, \\ 0 & \text{pour} \quad \nu > x, \end{cases}$$

Il est facile de voir qu'on obtient la sommabilité (C, 1). On peut d'ailleurs retrouver dans cette même voie la sommabilité (C, k) ([1]).

II. On prend

$$\Phi_\nu(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^\nu = t^\nu, \qquad S = \lim_{t=1} \sum_0^\infty a_n t^n,$$

on retrouve ainsi le théorème classique de continuité d'Abel comme cas particulier du précédent.

III. On pose, en désignant par k et δ deux constantes positives,

$$\Phi_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(k\nu+\delta)} \int_0^x e^{-t}\, t^{k\nu+\delta-1}\, dt,$$

d'où

$$S = \int_0^\infty e^{-t} \left(\sum_{\nu=0}^\infty \frac{a_\nu}{\Gamma(k\nu+\delta)}\, t^{k\nu+\delta-1} \right) dt,$$

on obtient ainsi un mode de sommation qui englobe la sommation exponentielle, sous sa forme intégrale (faites $k=\delta=1$), et la sommation de M. Le Roy, page 147 ($\delta = 1$).

IV. On prend

$$\Phi_\nu(x) = \frac{x}{x+\nu},$$

d'où

$$S = \lim_{x=\infty} \left[a_0 + a_1 \frac{x}{x+1} + a_2 \frac{x}{x+2} + \ldots + a_n \frac{x}{x+n} + \ldots \right].$$

([1]) $\Phi_0(x)$ étant pris égal à 1, on posera

$$\Phi_\nu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+k-1}\,\dfrac{x-2}{x+k-2}\cdots\dfrac{x-\nu}{x+k-\nu} & \text{pour} \quad \nu < x \\ 0 & \text{pour} \quad \nu > x. \end{cases}$$

V. On prend, en désignant par k une constante positive,

$$\Phi_0(x)=1, \qquad \Phi_\nu(x)=\frac{x}{x+k}\,\frac{x+1}{x+k+1}\cdots\frac{x+\nu-1}{x+k+\nu-1} \qquad (\nu \geq 1),$$

et l'on a

$$S=\lim_{x=\infty}\left[a_0+a_1\frac{x}{x+k}+a_2\frac{x(x+1)}{(x+k)(x+k+1)}\right.$$
$$\left.+a_3\frac{x(x+1)(x+2)}{(x+k)(x+k+1)(x+k+2)}+\ldots\right].$$

VI. Soit $f(x)$ une fonction qui croît de 0 à 1 quand x croît de 0 à $+\infty$. Soit $\{\theta_\nu\}$ une suite décroissante qui tend vers zéro. Nous pourrons prendre

$$\Phi_\nu(x)=f(\theta_\nu x)$$

et

$$S=\lim_{x=\infty}\sum_0^\infty a_\nu f(\theta_\nu x).$$

VII. Enfin, on peut noter que, si k désigne un exposant positif quelconque, il est toujours permis de substituer à l'une des précédentes suites $\{\Phi_\nu(x)\}$, la suite de terme général

$$[\Phi_\nu(x)]^k,$$

par exemple, en appliquant cette transformation à l'exemple I, on définira la limite généralisée de $\sum_0^n a_\nu$ par la limite de l'expression

$$a_0+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k a_1+\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^k a_2+\ldots+\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^k a_n,$$

ce qui nous conduit à un cas particulier de la méthode de M. M. Riesz, dont nous parlerons un peu plus loin, et qui équivaut à la sommation (C, k).

87. Examinons maintenant la seconde question posée au début du numéro précédent, celle de la concordance des résultats obtenus en prenant différentes suites de facteurs de convergence. Il est clair qu'en toute généralité, elle doit se trancher par la négative. C'est ce que nous avons vu dès l'Introduction de ce Livre,

lorsque nous avons mis en opposition les deux relations

$$\lim_{x=1} \frac{1-x^n}{1-x^m} = \frac{n}{m}, \qquad \lim_{x=1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

et remarqué que les développements tayloriens des deux membres se réduisent l'un et l'autre, pour la valeur $x = 1$, à la série d'Euler. Dans ce cas, en modifiant les facteurs de convergence, on modifie donc la limite.

Pour donner une condition, à la fois simple et générale, de concordance des différentes méthodes, M. Perron adopte le point de vue auquel nous nous sommes placés au n° 43 *bis*, c'est-à-dire il cherche ce que donnent les divers procédés appliqués à la progression géométrique

$$1 + u + u^2 + \ldots.$$

Une suite de facteurs sera considérée comme *canonique* ([1]), si l'on a

$$\lim_{x=\infty} \sum_0^\infty u^\nu \Phi_\nu(x) = \frac{1}{1-u}.$$

L'un des théorèmes de M. Le Roy (n° 85) exprime justement que ses facteurs

$$\frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} \qquad \left(\text{où } t = \frac{x}{x+1}\right)$$

forment une suite canonique. Plus généralement, M. O. Perron établit qu'il en est de même dans chacun des exemples cités. Il montre en outre qu'une suite sera canonique si les deux limites

$$\lim_{x=\infty} \left(\sum_0^\infty a_\nu \Phi_\nu \right) \quad \text{et} \quad \lim_{x=\infty} \left(\sum_0^\infty a_\nu \Phi_{\nu+p} \right)$$

partout où elles existent, sont égales quel que soit p. Si cette condition est remplie, nous aurons en effet

$$(4) \qquad \lim_{x=\infty} \left(\sum_0^\infty u^\nu \Phi_\nu \right) = \lim_{x=\infty} \left(\sum_0^\infty u^\nu \Phi_{\nu+p} \right)$$

([1]) M. O. Perron se sert du qualificatif *beständig*.

ou

$$1 + u + \ldots + u^{p-1} + (u^p - 1) \lim_{x=\infty} \left(\sum_0^\infty u^\nu \Phi_{\nu+p} \right) = 0,$$

d'où l'on déduit que les deux membres de (4) sont bien égaux à $\frac{1}{1-u}$.

88. Il n'y a qu'une différence de forme entre la sommation par les moyennes et la sommation par les facteurs de convergence.

Nous avons indiqué comment la première se rattache à la théorie des substitutions linéaires portant sur une suite infinie de variables. Il en est de même de la seconde, car lorsque nous posons

$$S = \lim_{x=\infty} \left[\sum_0^\infty a_\nu \Phi_\nu(x) \right] = \lim_{x=\infty} \left[\sum_0^\infty S_\nu(\Phi_\nu - \Phi_{\nu+1}) \right],$$

la forme même de cette dernière expression nous invite à considérer la suite indéfinie de formules

$$\sigma_m = \sum_0^\infty S_\nu [\Phi_\nu(m) - \Phi_{\nu+1}(m)],$$

ce qui confirme notre assertion. Ceci nous explique la raison des liens très étroits, qui nous ont été révélés par les exemples du n° 86 *bis*, entre le principe des facteurs de convergence et le principe des moyennes.

Renvoyons pour l'étude approfondie de ces substitutions linéaires infinies et de leurs applications, au Mémoire déjà cité (dont nous avons déjà une idée assez précise par les raisonnements présentés au cours du Chapitre III), de M. J. Schur (p. 114), ainsi qu'aux travaux suivants, dont nous empruntons les citations à l'Ouvrage bibliographique de M. Lloyd L. Smail (1) :

---

(1) Profitons de cette occasion pour citer quelques travaux importants de cet auteur :

Some generalisations in the theory of summable divergent series (*Dissertation*, Columbia, 1913); *A general method of summation of divergent series* (*Annals of Math.*, t. 20, 1918, p. 149-154); *Elements of the theory of infinite Processes* (New-York, Mc Grav Hill Book C°, 1923).

O. Toeplitz, *Ueber allgemeine lineare Mittelbindungen* (*Prace mat. fic.*, 22, 1911, p. 113-119).

L. Silvermann, *On the notion of summability for the limit of a function of a continuous variable* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 17, 1916, p. 284-294).

Hurwitz et L. Silvermann, *On the consistency and equivalence of certain definitions of summability* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 18, 1917, p. 1-20).

G. James, *Some theorems on the summation of divergent series* (*Dissertation, Columbia*, 1917); *On the theory of summability* (*Annals of Math.*, 1921, p. 120-127).

T. Kojima, *On generalized Toeplitz's theorems on limit and their Applications* (*Tohóku Math. Journ.*, 12, 1917, p. 291-326).

A.-D. Carmichael, *General aspects of the theory of summable series* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 25, 1918, p. 97-131).

F. Hausdorff, *Summationsmethoden and Momentfolgen*, I et II, (*Math. Zeitschrift*, 9, 1921).

W. Hurwitz, *Report on Topics in the theory of divergent series*, (*Bull. American Math. Soc.*, 28, 1922, p. 17-36).

K. Knopp, *Ueber das Eulersche Summierungsverfahren* (*Math. Zeitschrift*, 15, 1922, p. 226-253).

89. Nous sommes loin d'avoir épuisé tout ce qu'il y aurait à dire au sujet des facteurs de convergence. Certains auteurs se sont préoccupés d'étendre leur application aux séries doubles. Nous citerons notamment :

C. N. Moore, *Sur les facteurs de convergence dans les séries doubles et sur la série double de Fourier* (*Comptes rendus*, 155, 1912, 126-129); *On convergence factors in double series and the double Fourier's series* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 14, 1913, p. 73-104).

Indiquons encore ce genre de questions : on sait qu'une série est sommable (C, k) (ou plus généralement, par un processus déterminé); quelles conditions doit-on imposer à une suite de facteurs de convergence pour que la somme qu'elle assigne à la série coïncide avec sa somme relative au procédé indiqué?

Nous répondrons à cette question en citant un théorème de M. Bromwich [1], dont des cas particuliers avaient été antérieurement obtenus par MM. Moore, Hardy et Fejér.

---

[1] *On the limits of certain infinite series and integrals* (*Math. Ann.*, t. 65, 1908, p. 350-369).

Soient Σa_n la série donnée et $\varphi_n(x)$ nos facteurs de convergence. Introduisons les différences

$$\begin{aligned}\Delta\ \varphi_n &= \varphi_n - \varphi_{n+1},\\ \Delta^2 \varphi_n &= \varphi_n - 2\varphi_{n+1} + \varphi_{n+2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

dont la première s'est introduite naturellement dans la démonstration du théorème de M. Perron, où nous supposions la convergence de la série Σa_n, c'est-à-dire la sommabilité (C, o) : pour des sommabilités du genre (C, k), en désignant ici par k un entier et en remplaçant les a_n en fonction des S_n^k, nous serons amenés à itérer k fois la transformation d'Abel, c'est-à-dire à introduire $\Delta^{k+1}\varphi_n$. Cela posé, le théorème de M. Bromwich s'énonce ainsi : *Si Σa_n est sommable* (C, k) *avec la somme* S, *et si l'on a*

$$\sum_0^\infty n^k\,|\,\Delta^{k+1}\varphi_n\,| < \mathrm{M}\ (\text{indépendante de } x),$$

$$\lim_{n=\infty} n^k\varphi_n = 0,$$

$$\lim_{x=0} \varphi_n = 1 \qquad (x > 0),$$

la série $\sum_0^\infty a_n\varphi_n$ converge pour x positif et sa somme $S(x)$ *tend vers* S *lorsque x tend vers zéro.*

Il est clair que le théorème de régularité de M. Oscar Perron est un cas particulier du précédent.

90. *Les séries de Dirichlet et la méthode de M. M. Riesz.* — En analysant le Mémoire de M. O. Perron, nous avons déjà mentionné un cas particulier important du procédé de sommation de M. M. Riesz. Il consiste à définir la limite généralisée de $\sum_0^n a_\nu$ comme la limite ordinaire (lorsqu'elle existe) de l'expression

$$a_0 + a_1\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k + a_2\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^k + \ldots + a_n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^k,$$

en désignant par k une constante positive, ou encore comme la

limite pour ω infini (et > 0) de l'expression $\frac{\sigma_k(\omega)}{\omega^k}$, en posant

$$\sigma_k(\omega) = \sum_{i<\omega} a_i(\omega - i)^k.$$

M. M. Riesz a montré en 1911 que la sommabilité ainsi définie en dépendance de l'indice k, équivaut à la sommabilité (C, k). Pour la démonstration, nous renverrons le lecteur aux travaux de ce géomètre ou à l'Ouvrage de Hobson (t. II, p. 90 et suivantes). Remarquons seulement que, les procédés à comparer étant réguliers, leur équivalence sera établie si l'on démontre le résultat suivant :

Quand l'une des quantités $\frac{S_n^k}{n^k}$ et $\frac{\sigma_k(\omega)}{\omega^k}$ tend vers zéro, il en est de même de l'autre.

C'est justement ce que nous admettrons ici.

Indiquons maintenant comment M. Riesz a été conduit à généraliser. Différentes questions, par exemple la théorie des nombres premiers, ont amené les géomètres à s'occuper des séries de Dirichlet, c'est-à-dire des séries de la forme

$$\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s},$$

où s est une variable réelle ou complexe, et où les λ_n forment une suite croissante à termes tous positifs tendant vers $+\infty$. Les coefficients a_n sont quelconques. On dit que toutes les séries attachées à une même suite λ_n appartiennent au type λ_n. Par exemple, en posant $z = e^{-s}$, on ramène une série entière en z au type n. Donnons quelques brèves indications sur les séries de Dirichlet : nous les emprunterons au fascicule 17 du *Mémorial des Sciences Mathématiques*, rédigé par M. G. Valiron.

Posons, comme on le fait d'habitude,

$$s = \sigma + it.$$

Lorsque la série converge (convergence simple), pour une certaine valeur s_0, on déduit de la transformation d'Abel qu'elle converge également pour toute valeur s telle que $\sigma > \sigma_0$. On est

ainsi conduit à la notion d'une abscisse remarquable C, appelée *abscisse de convergence simple*, telle que la série converge dans le demi-plan $\sigma > C$. On a donc une analogie avec la théorie des séries entières, puisqu'en posant $e^{-s} = z$, un cercle $|z| = \text{const.}$ est remplacé dans le plan $\sigma + it$ par une droite $\sigma = \text{const.}$ ([1]). Mais cette analogie ne saurait être poussée plus loin (sans hypothèses complémentaires). En général, la convergence absolue d'une série de Dirichlet n'a lieu qu'à partir d'une certaine abscisse A qui surpasse C, dans le demi-plan $\sigma \geqq A$ (dans le cas des séries de type n, nous sommes ramenés aux séries entières, donc $A = C$) ([2]).

Si la série converge pour s_0, on démontre qu'elle converge uniformément à l'intérieur de l'angle défini par les inégalités

$$\sigma - \sigma_0 \geqq 0, \qquad |s - s_0| \leqq H(\sigma - \sigma_0),$$

H étant un nombre positif arbitrairement grand. Sa somme à l'intérieur du domaine de convergence est donc une fonction analytique $f(s)$ ([3]). En outre, à l'intérieur de l'angle précédent, la fonction $f(s)$ tend vers zéro comme une exponentielle, car on

---

([1]) Nous écartons le cas où C serait égal à $+\infty$.

([2]) Plus généralement on a $A = C$ lorsque $\frac{\log n}{\lambda_n}$ tend vers zéro.

([3]) Notons que contrairement à ce qui a lieu pour la série de Taylor, la droite $\sigma = C$ ne contient pas nécessairement de point singulier de cette fonction. Voici un exemple que nous empruntons au fascicule déjà cité de M. G. Valiron: soit une suite μ_n de nombres positifs indéfiniment croissants; adjoignons-leur des nombres positifs ε_n tels que la série

$$\varepsilon_0 e^{-\mu_0 s} + \varepsilon_1 e^{-\mu_1 s} + \varepsilon_2 e^{-\mu_2 s} + \ldots + \varepsilon_n e^{-\mu_n s} + \ldots$$

converge quel que soit s. Considérons maintenant la nouvelle série de Dirichlet

$$e^{-\mu_0 s} - e^{-(\mu_0+\varepsilon_0)s} + e^{-\mu_1 s}$$
$$- e^{-(\mu_1+\varepsilon_1)s} + e^{-\mu_2 s} - e^{-(\mu_2+\varepsilon_2)s} + \ldots + e^{-\mu_n s} - e^{-(\mu_n+\varepsilon_n)s} + \ldots$$

il suffit d'y grouper les termes de rangs $2n$ et $2n+1$ et d'appliquer la formule des accroissements finis, pour voir qu'elle représente une fonction entière; cette fonction n'a donc pas de singularité à distance finie et cependant il est manifeste que l'abscisse de convergence est ici $C = 0$. On peut supposer en particulier que A est lui-même nul, il suffit de supposer à cet effet que $\log n : \mu_n$ tende vers zéro. Ceci montre la différence profonde entre les séries de Dirichlet générales et les séries entières.

peut écrire

$$f(s) = e^{-\lambda_1 s}(a_1 + a_2 e^{-(\lambda_2-\lambda_1)s} + a_3 e^{-(\lambda_3-\lambda_1)s} + \ldots),$$

le second facteur ne pouvant s'annuler au delà d'une certaine distance du sommet, on en conclut que $f(s)$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans cet angle. Puisque la différence de deux séries de Dirichlet en est une autre, il s'ensuit qu'une série de cette nature, convergente pour $\sigma > C$, ne peut représenter zéro dans une portion de ce demi-plan que si tous ses coefficients sont nuls : il est donc impossible de représenter la même fonction analytique par deux développements de Dirichlet distincts.

Les premiers résultats sur la possibilité de prolonger $f(s)$ au delà de la région de convergence par sommabilité, ont été publiées presque simultanément par MM. H. Bohr, G. Hardy et M. Riesz : étudiant principalement les séries du type $\log n$, c'est-à-dire de la forme $\sum \frac{a^n}{n^s}$, ils ont établi que la région dans laquelle elles jouissent de la sommabilité (C, k) est encore un demi-plan $\sigma > \sigma_k$ [1]. Donnons à k les valeurs entières successives 1, 2, 3, ... Nous aurons une suite décroissante de nombres négatifs $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, tels que pour $\sigma > \sigma_n$, il y ait sommabilité (C, n) (nous écartons le cas

---

(1) Un exemple souvent cité est celui de la série

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s},$$

laquelle est convergente pour $\sigma > 0$, divergente pour $\sigma \leqq 0$ (le terme général ne tendant plus vers zéro). Soit une valeur $-\alpha + i\beta$ de s (où α est un nombre positif). Pour $\sigma > -\alpha$, on peut démontrer, avec Chapman (*Proc. London Math. Society*, vol. 9, 1911, p. 397), que la série en question jouit de la sommabilité (C, α). Au point de vue pratique, il suffit de retenir que si r désigne un entier, il y aura sommabilité (C, r) dans le demi-plan $\sigma > r$. On en conclut à la possibilité de prolonger analytiquement $f(s)$ dans tout le plan ; comme il n'y a pas de point singulier à distance finie, cette fonction $f(s)$ est donc entière. Si l'on remarque que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann est liée à $f(s)$ par l'identité facile à vérifier

$$\zeta(s)\left(1 - \frac{2}{2^s}\right) = f(s) \qquad \left(\text{on pose } \zeta(s) = \sum_s \frac{1}{n^s}\right),$$

on déduira très facilement de ce qui précède la nature analytique de $\zeta(s)$; voici le résultat :

$$\zeta(s) - \frac{1}{1-s} = \text{fonction entière de } s.$$

où ces nombres seraient tous nuls). Si $\lim\limits_{n=\infty}\sigma_n = -\infty$, la série représente une fonction entière. Sinon, les σ_n tendent vers une valeur négative $-\alpha$. Sa somme est alors une fonction analytique pour $\sigma > -\alpha$.

91. Pour passer à des séries de Dirichlet générales, c'est-à-dire d'un type λ_n quelconque, M. M. Riesz a eu l'idée simple et féconde d'utiliser des processus de sommation dont la loi met en jeu la suite des λ_n. C'est ainsi qu'il a considéré les expressions [1]

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & \displaystyle\sum_{\lambda_p<\omega} a_p e^{-\lambda_p s}\left(1-\frac{\lambda_p}{\omega}\right)^k \\ (b) & \displaystyle\sum_{\lambda_p<\omega} a_p e^{-\lambda_p s}(1-e^{\lambda_p-\omega})^k \end{array}\right\}\ (k>0),$$

dans les cas où elles admettent des limites, on a une notion nouvelle de la limite généralisée de la somme

$$\sum a_p e^{-\lambda_p s}.$$

Nous allons dire quelques mots des deux procédés de sommation ainsi introduits : nous les distinguerons en les appelant respectivement :

$$\begin{array}{ll} (a) & \text{sommation } (\lambda_n,\ k), \\ (b) & \text{sommation } (e^{\lambda_n},\ k), \end{array}$$

ce qui unifie d'ailleurs la notation. Il est clair qu'en revenant à des séries purement numériques Σu_n, les deux opérations qui consistent à chercher (si elles existent), les limites des expressions

$$\begin{array}{ll} (a) & \displaystyle\sum_{\lambda_p<\omega} u_p\left(1-\frac{\lambda_p}{\omega}\right)^k, \\ (b) & \displaystyle\sum_{\lambda_p<\omega} u_p\left(1-\frac{e^{\lambda_p}}{e^{\omega}}\right)^k, \end{array}$$

---

(1) *Cf.* Valiron, *loc. cit.*, p. 33.

sont identiques à la substitution près de la suite $\{e^{\lambda_n}\}$ à la suite $\{\lambda_n\}$, en passant de (a) à (b) [1].

Montrons comment ces notions se rattachent à d'autres déjà rencontrées :

1° Pour prolonger les séries de Dirichlet du type $\lambda_n = \log n$, nous avons eu recours à la méthode de sommation de Cesàro. Mais, d'après ce que nous avons vu, celle-ci équivaut à prendre la limite de

$$\sum_{\log p < \omega} u_p \left(1 - \frac{p}{e^\omega}\right)^k \qquad \text{ou de} \qquad \sum_{< n+1} u_p \left(1 - \frac{p}{n+1}\right)^k.$$

La méthode de sommation de Cesàro équivaut donc à la sommabilité (n, k) de Riesz.

2° La sommation $(\lambda_n, 1)$ de Riesz utilise, lorsqu'elle existe, la limite de l'expression

$$u_0 + u_1\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right) + u_2\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}}\right) + \ldots + u_n\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right),$$

laquelle peut s'écrire

$$\frac{S_0 + c_1 S_1 + c_2 S_2 + \ldots + c_n S_n}{1 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n},$$

en posant $c_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i$, de sorte que la série positive Σc_i est divergente. Donc la sommation $(\lambda_n, 1)$ se ramène à la sommation par les séries divergentes.

Ces rapprochements ont amené MM. Riesz et Hardy à étudier comparativement les procédés de sommation (λ_n, k), en généralisant les résultats simples obtenus soit pour $\lambda_n = n$, soit pour $k = 1$.

1° Pour une même suite λ_n, donnons à l'exposant deux valeurs positives distinctes k et k', si $k' > k$, on démontre que la sommabilité (λ_n, k) entraîne la sommabilité (λ_n, k') avec égalité des sommes. Ce n'est là qu'un cas particulier d'un théorème général, complétant l'exemple VII d'application du théorème de M. Oscar

---

(1) Désignons par $\sigma(\lambda)$ la fonction égale à $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ dans l'intervalle $(\lambda_{n-1}, \lambda_n)$, la limite de l'expression (a) peut être remplacée par celle de l'expression

$$\frac{k}{\omega^k}\int_0^\omega \sigma(\lambda)\,(\omega - \lambda)^{k-1}\,d\lambda.$$

Perron (n° 86) : soit la suite de fonctions positives $\{\Phi_\nu(x)\}$ qui, pour x fixe, décroissent avec ν, et dont chacune tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. Si la série $\sum_0^\infty u_\nu \Phi_\nu(x)$ est convergente et si sa somme tend vers une limite pour x infini, il en est de même de la somme de la série $\sum_0^\infty u_\nu \{\Phi_\nu(x)\}^{1+h}$, en appelant h une constante positive, et il y a égalité des limites; dans le cas qui nous intéresse spécialement, nous aurons $1+h=\frac{k'}{k}$.

2° Pour une même valeur de k, on peut considérer deux suites distinctes $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$, et donner des conditions suffisantes pour que la sommabilité (λ_n, k) entraîne la sommabilité (μ_n, k) avec la même somme. Nous renverrons pour cette partie du sujet à un Mémoire de M. G. Hardy : *The second Theorem of consistency for summable series* (*Proceedings London Mathematical Society*, 2e série, t. 15, 1915, p. 72-88) (¹).

3° Au point de vue formel, le produit de deux séries de Dirichlet

$$f(s)=\sum a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad g(s)=\sum b_p e^{-\lambda'_p s},$$

est une série de Dirichlet de type ν_m, les ν_m étant des nombres $\lambda_n+\lambda'_p$ rangés par ordre croissant (au cas où plusieurs couples n, p donneraient la même somme $\lambda_n+\lambda'_p=\nu_m$, le coefficient de $e^{-\nu_m s}$ est la somme $\Sigma a_n b_p$ étendue à ces couples de nombres). Dans le cas où les deux séries possèdent un domaine de convergence absolue commun $\sigma>\sigma_0$, la série produit converge elle-même absolument dans ce domaine et a pour valeur $f(s)\,g(s)$. Cela posé revenons aux séries numériques. On peut prouver que si les séries Σu_n et Σv_n sont sommables (λ_n, k) et (λ'_n, k'), la série produit sera sommable $(\nu_n, k+k'+1)$, sa somme étant égale au produit des sommes des deux premières (²).

Nous n'insisterons pas davantage sur cette théorie qui conduit, pour les séries de Dirichlet, à définir un demi-plan de sommabi-

(¹) *Voir* également le fascicule cité de M. Valiron, vers la fin de la page 33.

(²) Valiron, *loc. cit.*, p. 34; *voir* également l'Ouvrage de Riesz et Hardy *Sur les séries de Dirichlet* (*Cambridge Mathematical Tracts*, 1915).

lité, qui est le même pour la sommation (λ_n, k) et pour la sommation (e^{λ_n}, k).

Remarquons en terminant que, pour le type n, l'abscisse de sommabilité n'est pas distincte de l'abscisse de convergence. Plus généralement, cela a lieu lorsque la loi de croissance des λ_n est suffisamment rapide; par exemple, ce résultat est acquis lorsque le rapport $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ reste supérieur à un nombre fixe, surpassant l'unité.

92. *Les séries de facultés, l'intégrale de Laplace-Abel et la sommation exponentielle de M. Borel.* — Dans cette revue rapide des progrès récents de la théorie des séries divergentes, nous n'avons pu qu'effleurer les séries de Dirichlet, et il nous a fallu délaisser les applications des procédés sommatoires à des classes spéciales de séries : séries trigonométriques (¹), séries de Laplace et de Legendre (²), séries de fonctions de Bessel (³), séries de fonctions orthogonales quelconques (⁴).

Revenant au point de vue de la sommation des séries entières à rayon de convergence nul, nous allons nous occuper des séries de la forme

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}, \tag{1}$$

auxquelles on donne le nom de séries de *facultés* (faculté étant ici synonyme de factorielle). Ces séries, dont le domaine de convergence est encore un demi-plan $\mathcal{R}(z) > \alpha$ (⁵), qui convergent

---

(¹) *Voir* le Chapitre VIII du Tome II du Traité de M. Hobson.

(²) *Rendic. Palermo*, t. 32, 1910, et t. 33, 1911 (articles de MM. A. Haar, H. Weyl, M. Plancherel); *Math. Annalen*, t. 74, 1913 (deux articles de M. T H Gronwall); *Math. Zeitschrift*, t. 14, 1922 (articles de MM. E. Kogbeliantz et Lukácz).

(³) *Trans. Amer Math. Society*, t. 10, 1909 et t. 21, 1920 (articles de M. C. Moore).

(⁴) *Math. Ann.*, t. 67, 1908 (article de M. H. Weyl); *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 25, 1919 (article de M. C. Moore).

(⁵) En supprimant le premier terme et multipliant par z, on peut se ramener à l'étude de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n n}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}$. M. Landau a démontré que

d'ailleurs uniformément dans chaque demi-plan $\mathcal{R}(z) > \alpha + \varepsilon$, et qui ne font correspondre à une $F(z)$ déterminée qu'un seul développement, représentent en effet des fonctions de l'espèce étudiée par M. Borel, lesquelles donnent naissance à des séries de puissances divergentes, fournissant leur expression asymptotique dans un certain angle, et sommables dans cet angle par la méthode exponentielle.

L'origine de ce rapprochement réside dans la possibilité d'exprimer $F(z)$ au moyen d'une intégrale de Laplace-Abel

(2) $$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x)\, dx,$$

intégrale à laquelle on peut d'ailleurs rattacher celle dont M. Borel s'est servi [1].

93. Les intégrales de la forme (2) (qui à la substitution près d'une intégration à une sommation discrète, sont de la même famille que les séries de Dirichlet), ont été très étudiées et appliquées à l'intégration des équations différentielles linéaires [2]. Représentons par $R(z)$ la partie réelle de z. *Toute intégrale de cette forme converge dans un demi-plan* $\mathcal{R}(z) > \alpha$. Il suffit, pour le voir, de montrer que s'il y a convergence pour une valeur z_0 de z, il y a encore convergence pour chaque valeur $z_0 + h$ telle que la partie réelle de h soit positive. Or, si l'on pose

$$\varphi(z_0 + h, l) = \int_0^{l} e^{-hx}[e^{-z_0 x} f(x)\, dx],$$

cette série converge dans le même demi-plan que la série de Dirichlet associée

$$\sum_{n=1} \frac{a_n}{n^z};$$

bien entendu, l'on enlève de ce demi-plan ceux des points $-1, -2, \ldots$ qu'ils pourraient contenir et qui sont des pôles simples de la fonction $F(z)$. Pour les démonstrations, nous renvoyons au Chapitre VI de l'Ouvrage, récemment paru dans cette collection, de M. Nörlund (*Leçons sur les séries d'interpolation*, rédigées par M. René Lagrange nos 81 et suivants).

(1) *Cf.* Mittag-Leffler, *C. R. Ac. Sc.*, t. 135, p. 937 et t. 136, p. 537. Dans la seconde Note citée, l'auteur rattache les intégrales de M. Le Roy à une forme généralisée de l'intégrale de Laplace.

(2) *Voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, 2e édition, 1908, p. 394 et suiv.

une intégration par parties donne

$$\varphi(z_0+h, l) = e^{-hl}\varphi(z_0, l) + h\int_0^l e^{-hx}\varphi(z_0, x)\,dx;$$

en faisant croître l indéfiniment, on a donc

$$\int_0^\infty e^{-(z_0+h)x} f(x)\,dx = h\int_0^\infty e^{-hx}\varphi(z_0, x)\,dx.$$

Les fonctions $F(z)$, représentables par l'intégrale de Laplace, forment une classe particulière d'où sont notamment exclues les fonctions admettant, à l'exemple de $\sin kz$ une infinité de racines réelles en progression arithmétique. En effet, à supposer qu'une telle fonction puisse s'exprimer par une intégrale de Laplace, en appelant z_0 une première racine, h la raison, on aurait quel que soit l'entier m

$$\int_0^\infty e^{-mhx}\varphi(z_0, x)\,dx = 0,$$

d'où en posant $e^{-hx} = t$

$$\int_0^1 t^{m-1}\varphi\left(z_0, -\frac{\log t}{h}\right)dt = 0.$$

Or si une intégrale du type

$$I_p = \int_0^1 t^p\varphi(t)\,dt$$

est nulle quel que soit l'entier p, il en sera de même de l'intégrale

$$\int_0^1 P(t)\varphi(t)\,dt,$$

quel que soit le polynome $P(t)$, et puisque $\varphi(t)$ peut être obtenue comme la limite, uniformément atteinte, d'une suite de polynomes, nous aurons

$$\int_0^1 [\varphi(t)]^2\,dt = 0,$$

donc si $\varphi(t)$ est continue, on a $\varphi(t) \equiv 0$ pour $0 \leq t \leq 1$, ce qui démontre le résultat annoncé. On voit en même temps que la représentation annoncée, lorsqu'elle existe, est nécessairement unique.

La remarque précédente [1] donne un intérêt spécial au théorème suivant (Nörlund, *Séries d'interpolation*, n° 87) :

Soit une fonction analytique $\Phi(z)$ *qui, dans le demi-plan*

$$\mathcal{R}(z) \geqq \beta > 0,$$

soit partout holomorphe, et puisse se mettre sous la forme

$$\frac{a_0}{z} + \frac{\mu(z)}{z^2},$$

la fonction $\mu(z)$ *restant bornée dans le domaine précédent. On peut représenter cette fonction au moyen de l'intégrale de Laplace.*

En effet, soit C le contour constitué par une demi-circonférence

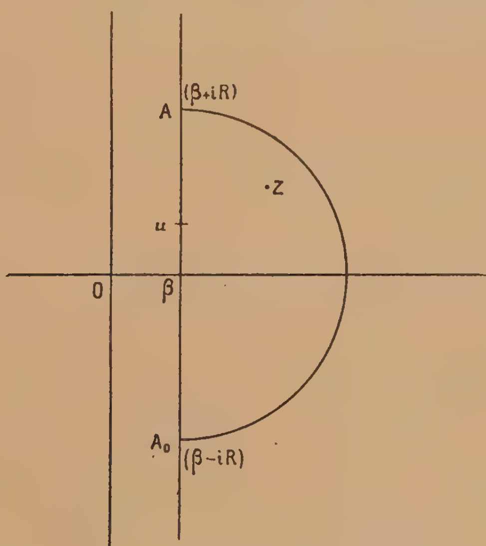

Fig. 17.

et son diamètre, dont les extrémités sont les nombres conjugués

$$\beta - iR \quad \text{et} \quad \beta + iR.$$

Nous aurons, en intégrant le long de c, dans le sens direct

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(u)\,du}{u - z}.$$

---

[1] Ces considérations sont empruntées à un cours de M. Émile Picard.

Lorsque R croît indéfiniment, l'intégrale étendue à la demi-circonférence tend vers zéro et il reste

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\Phi(u)\,du}{z-u}.$$

Mais nous avons $\mathcal{R}(u) < \mathcal{R}(z)$, donc

$$\frac{1}{z-u} = \int_0^\infty e^{-x(z-u)}\,dx,$$

d'où en portant dans l'expression précédente de $\Phi(z)$ et intervertissant l'ordre des intégrations (opération que nos hypothèses rendent légitime) [1]

$$(1) \qquad \Phi(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\,dx,$$

avec

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{ux}\,\Phi(u)\,du \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Notons, avant d'aller plus loin, qu'en posant $u = \beta + iv$, l'intégrale (2) peut s'écrire

$$f(x) = \frac{e^{\beta x}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos vx + i\sin vx)\,\Phi(\beta + iv)\,dv,$$

et se ramène à deux intégrales de Fourier. D'autre part, en posant

$$e^{-x} = t, \qquad \text{d'où} \qquad dx = -\frac{dt}{t},$$

nous pourrons mettre les relations (1) et (2) sous la forme

$$(1') \qquad \Phi(z) = \int_0^1 t^{z-1} f(-\log t)\,dt = \int_0^1 t^{z-1}\varphi(t)\,dt,$$

$$(2') \qquad \varphi(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} t^{-u}\,\Phi(u)\,du.$$

---

[1] Cette légitimité est immédiate pour le terme $\frac{\mu(z)}{z^2}$, à cause de la convergence absolue; elle se présente comme le résultat d'un calcul (que nous ne développerons pas ici) pour le terme en $\frac{1}{z}$.

94. Ces résultats s'appliquent notamment aux fonctions définies par les séries de facultés. Car on établit aisément (*voir* l'Ouvrage cité de M. Nörlund) qu'une telle fonction est bien de la forme

$$\Phi(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{\mu(z)}{z^2},$$

$\mu(z)$ étant holomorphe et bornée pour $\mathcal{R}(z) \geqq \beta$, chaque fois que β est un nombre positif surpassant l'abscisse de convergence α de la série donnée. Donc les fonctions définies par les séries de facultés sont représentables par une intégrale de Laplace-Abel, ou par une intégrale équivalente de la forme (1'). Il importe d'observer que la fonction $\varphi(t)$ mise en jeu n'est pas quelconque : en portant dans (2') la valeur

$$\Phi(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)},$$

on démontre qu'on obtient pour $\varphi(t)$ le développement

$$\varphi(t) = \sum_{0}^{\infty} a_n(1-t)^n, \tag{3}$$

convergent pour toute valeur positive de t inférieure à l'unité [1]. Il s'ensuit que la fonction $\varphi(t)$ est holomorphe dans le cercle

$$|t-1| < 1.$$

On montre même que la fonction $\varphi(t)$ est *d'ordre fini* sur la circonférence, au sens de M. Hadamard, ce qui revient à dire : si l'on considère une suite de fonctions commençant par $\varphi(t)$ et dont chacune soit la primitive de la précédente, les fonctions de cette suite à partir d'un certain rang seront finies et à écart fini sur le cercle de convergence [2]. Cela équivaut d'ailleurs à affirmer qu'il

---

[1] Sa convergence est une conséquence du fait qu'on peut légitimer, pour $0 < t < 1$, l'intégration terme à terme.

[2] Une fonction $F(\theta)$ de l'abscisse angulaire θ d'un point sur un cercle est *à écart fini* sur ce cercle si les intégrales

$$m\int \cos m\theta\, F(\theta)\, d\theta, \qquad m\int \sin m\theta\, F(\theta)\, d\theta$$

restent inférieures en valeur absolue à un nombre fini (indépendant de m), quel que soit l'arc du cercle de convergence (pouvant comprendre la totalité de ce

existe un nombre positif p tel que, la suite des quantités $\frac{a_n}{n^p}$ est bornée.

Réciproquement, on démontre que toute intégrale de la forme (1′), où $\varphi(t)$ est une fonction holomorphe dans le cercle

$$|t-1|=1,$$

et d'ordre fini sur ce cercle, est représentable par une série de facultés, qu'on obtient en remplaçant $\varphi(t)$ dans (1′) par son développement (3) et intégrant terme à terme.

95. Suivons toujours M. Nörlund et posons maintenant $t=\xi^{\frac{1}{\omega}}$, avec $\omega>1$. Au cercle $|\xi-1|\leq 1$ correspond un domaine délimité par la courbe $|t^\omega-1|=1$, laquelle est une courbe fermée, offrant à l'origine un point anguleux, admettant l'axe réel comme axe de symétrie, et le point $2^{\frac{1}{\omega}}$ comme sommet. Cette courbe est tout

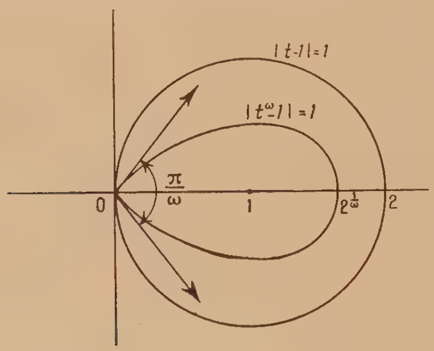

Fig. 18.

entière à l'intérieur du cercle $|t-1|=1$. Il s'ensuit que la fonction $\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sera holomorphe dans le cercle $|\xi-1|=1$ et sur sa circonférence, l'origine étant exceptée. D'une manière plus générale, supposons que la fonction $\varphi(t)$ soit holomorphe à l'intérieur

---

cercle) auquel on les étend. L'ordre est d'ailleurs susceptible d'une définition précise et dans les cas (comme celui-ci) où le rayon du cercle de convergence est l'unité, s'exprime par $1+\overline{\lim_{m=\infty}}\frac{L|a_m|}{Lm}$

d'un secteur circulaire de sommet o, comprenant le segment

$$0 \leq t \leq 1,$$

d'angle au sommet arbitraire, et de rayon > 1, et de plus qu'il existe un nombre $\varkappa$ non négatif tel qu'on ait, à l'intérieur de ce secteur et d'une manière uniforme,

$$\lim_{t=0} t^{\varkappa} \varphi(t) = 0;$$

dès lors, on pourra toujours prendre le nombre positif ω suffisamment grand pour que $\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ soit holomorphe dans le cercle

$$|\xi - 1| \leq 1$$

et sur sa circonférence, l'origine exceptée, avec un ordre fini et positif en ce point [1]. Dans ces conditions, la réciproque admise au nº 94 nous apprend que l'intégrale

$$F(z) = \frac{1}{\omega} \int_0^1 \xi^{\frac{z}{\omega}-1} \varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right) d\xi,$$

est représentable par une série de facultés, relativement à la variable $\frac{z}{\omega}$; c'est-à-dire par un développement de la forme

$$(4) \qquad F(z) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n n!\, \omega^n}{z(z+\omega)(z+2\omega)\ldots(z+n\omega)},$$

qui converge au moins pour $\mathcal{R}(z) > \varkappa$ (ce que nous admettrons ici). Il est clair que, si ce développement est possible pour une valeur ω_0 de ω, il le sera pour toute valeur ω_1 dépassant ω_0.

En revenant de la variable t à la variable x, on est amené avec M. Nörlund à la proposition suivante (*loc. cit.*, nº 97) :

Pour qu'une fonction $F(z)$ puisse être représentée par une série

---

[1] Le degré d'infinitude de la fonction au point singulier n'est pas en général égal à l'ordre (*Cf.* HADAMARD et MANDELBROJT, *loc. cit.*, Chap. V, p. 84 et suiv.) Mais, si l'on a pris pour $\varkappa$ le plus petit nombre positif tel que $\lim_{t=0} t^{\varkappa}\varphi(t) = 0$, ou ce qui revient au même, tel que $\lim_{\xi=0} \xi^{\frac{\varkappa}{\omega}} \varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right) = 0$, l'ordre de $\varphi\left(\xi^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur la circonférence $|\xi - 1| = 1$ ne pourra dépasser $\frac{\varkappa}{\omega}$ de plus d'une unité.

de facultés de la forme (4), il faut et il suffit qu'il existe un nombre $\varkappa$ assurant la réalisation des conditions ci-dessous :

1° $F(z)$ peut s'écrire $\frac{a_0}{z} + \frac{\mu(z)}{z^2}$, $\mu(z)$ étant holomorphe et bornée dans le demi-plan $\mathcal{R}(z) \geqq \varkappa > 0$;

2° $F(z)$ doit être telle que la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{xz} F(z)\, dz, \tag{5}$$

soit holomorphe dans la bande ABCD figurée ci-dessous [bande qui est l'image dans le plan de la variable x du secteur circulaire pré-

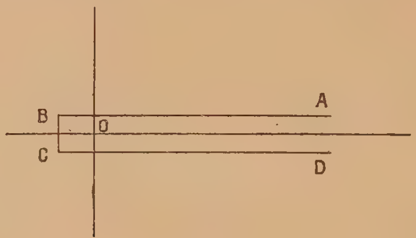

Fig. 19.

cédent du plan (t), lorsqu'on effectue la transformation $t = e^{-x}$] et satisfasse uniformément, dans cette bande, à la condition

$$\lim_{x=+\infty} e^{-\varkappa x} f(x) = 0.$$

Moyennant quoi, en prenant ω suffisamment grand, le développement (4) sera toujours possible.

96. Mais il nous hâte d'arriver au point qui, dans cette question, nous intéresse le plus particulièrement. La fonction $F(z)$ définie par la série (4) est en général singulière à l'infini. Dans ce cas, son développement suivant les puissances de $\frac{1}{z}$ est divergent; mais il représente asymptotiquement cette fonction dans le domaine de convergence de la série. En effet, considérons l'expression de $F(z)$ au moyen de $f(x)$

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-xz} f(x)\, dx, \tag{6}$$

où $f(x)$ est donnée par la formule (5) : si l'on y substitue à $F(z)$ son développement, écrit sous la forme

$$\frac{a_0}{z}+\frac{a_1\omega}{z(z+\omega)}+\ldots+\frac{a_n\, n!\,\omega^n}{z(z+\omega)\ldots(z+n\omega)}+R_n(z),$$

on obtient

$$f(x)=a_0+a_1(1-e^{-\omega x})+\ldots+a_n(1-e^{-\omega x})^n+\frac{1}{2i\pi}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}e^{xz}R_n(z)\,dz.$$

On en déduit les valeurs des dérivées d'ordre $p<n$

$$(7)\qquad f^{(p)}(x)=\Pi_p(e^{-\omega x})+\frac{1}{2i\pi}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}z^p e^{xz}R_n(z)\,dz,$$

où Π_p représente un polynome, dépourvu de terme constant. En outre, l'intégrale est absolument convergente, car nous avons

$$R_n(z)=\frac{a_{n+1}\,\overline{n+1}\,!\,\omega^{n+1}}{z(z+\omega)\ldots[z+(n+1)\omega]}+\ldots,$$

d'où l'on déduit facilement que $|z^{n+2}R_n(z)|$ reste borné le long de la droite $\mathcal{R}(z)=\varkappa$. Or, quand x croît indéfiniment, le terme Π_p au second membre de (7) tend vers zéro, et le module de l'intégrale admet, quel que soit p, une limite supérieure de la forme $Ce^{\varkappa x}$. On a donc, pour toutes les dérivées de $f(x)$, en appelant ε un nombre positif arbitrairement petit,

$$(8)\qquad \lim_{x=\infty} e^{-(\varkappa+\varepsilon)x}f^{(p)}(x)=0\qquad (p=0,1,2,\ldots).$$

Cela posé, reprenons l'intégrale (6) et supposons $\mathcal{R}(z)>\varkappa$. Grâce au résultat (8) que nous venons d'obtenir, nous pourrons intégrer par parties et nous obtiendrons

$$(9)\quad F(z)=\frac{f(0)}{z}+\frac{f'(0)}{z^2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{z^{n+1}}+\frac{1}{z^{n+1}}\int_0^\infty e^{-zx}f^{(n+1)}(x)\,dx,$$

où l'on a d'après (8)

$$|f^{(n+1)}(x)|<Ce^{(\varkappa+\varepsilon)x},$$

le long de la droite d'intégration, le terme résiduel est donc de la forme

$$\frac{C\theta}{z^{n+1}[\mathcal{R}(z)-\varkappa-\varepsilon]}$$

en appelant θ une quantité dont le module est inférieur à l'unité. D'où finalement

$$F(z) = \frac{f(0)}{z} + \frac{f'(0)}{z^2} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{z^{n+1}}(1 + \eta_n),$$

η_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{\mathcal{R}(z)}$. Ce qui établit le résultat annoncé.

Donc $F(z)$ donne naissance à une série de puissances partout divergente (en général), dont on pourra faire usage en la transformant en une série de facultés. Le calcul, indiqué déjà par Stirling, n'offre aucune difficulté, il s'agit seulement d'identifier

$$\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1 \omega}{z(z+\omega)} + \frac{a_2\, 2!\, \omega^2}{z(z+\omega)(z+2\omega)} + \ldots,$$

ce qui conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires dans lequel les inconnues se déterminent de proche en proche. « C'est peut-être là, dit M. Nörlund (*loc. cit.*), la meilleure méthode de sommation, surtout lorsqu'il s'agit d'un calcul numérique de $F(z)$ pour les très grandes valeurs de z, car la série de facultés converge alors rapidement, quand on choisit ω convenablement ». Une étude approfondie de la série asymptotique (9) a été faite par MM. G. Watson et F. Nevannlina [1].

97. Mais il y a plus. L'expression (9) montre encore que la valeur conférée à la série

$$\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots$$

par la série de facultés résultant du calcul précédent, coïncide avec celle que donne la méthode exponentielle de M. Borel. En effet, pour appliquer cette dernière, nous devons former la fonction associée

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!}x + \frac{c_2}{2!}x^2 + \frac{c_3}{3!}x^3 + \ldots,$$

elle réussira si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans une région

---

(1) Nevannlina, *Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen* (*Thèse*, Helsingfors, 1918). — Watson, *A theory of asymptotic series* (*Phil. Trans. royal. Soc. London*, série A, t. 211, 1911); *The transformation of asymptotic series* (*Rendic. di Palermo*, t. 34, 1912).

infinie comprenant l'axe des nombres positifs et si l'on a uniformément dans cette région, quel que soit l'entier p

$$\lim_{x=\infty} e^{-\varkappa x} f^{(p)}(x) = 0,$$

$\varkappa$ désignant un certain nombre positif. La somme de la série est alors, par définition,

$$F(z) = \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-a} f\left(\frac{a}{z}\right) da,$$

ou, en posant $\frac{a}{z} = x$,

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-xz} f(x)\,dx.$$

En résumé, nous arrivons avec M. Nörlund à l'importante conclusion que voici :

Les fonctions F(z) *développables en séries de facultés de la forme* (4) *s'identifient avec celles qui donnent naissance à des séries de puissances*

$$\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots,$$

absolument et uniformément sommables au sens de M. Borel.

Notons d'ailleurs qu'on a appliqué avec succès les séries de facultés à l'intégration d'équations différentielles algébriques. Nous renverrons sur ce sujet aux travaux de M. J. Horn (*Math. Annalen*, t. 71, 1911; *Math. Zeitschrift*, t. 8, 1920, et t. 21, 1924).

98. *Les fonctions quasi-analytiques et les séries divergentes.* — M. Borel a appelé *quasi-analytique* toute fonction de la variable réelle x, non développable en une série de Taylor convergente, bien que déterminée par sa valeur et celles de ses dérivées successives en un point. Pendant longtemps, observe M. Denjoy à qui cette théorie doit des progrès décisifs, M. Borel a été le seul à concevoir l'existence de pareilles fonctions. Nous avons vu au Chapitre V comment, par les séries (M), il était parvenu à prolonger une fonction analytique telle que

$$\sum \frac{A_k}{z - a_k},$$

sur un ensemble de demi-droites partout denses en direction, et extérieures à la circonférence portant les singularités a_k, circonférence qui joue le rôle de coupure essentielle pour la fonction au point de vue de Weierstrass.

M. Denjoy a réussi à libérer les recherches sur les fonctions quasi-analytiques de considérations relatives aux variables complexes. Voici son théorème fondamental ([1]) :

Si $f(x)$ est une fonction de variable réelle, définie dans l'intervalle (a, b), et y possédant des dérivées de tous ordres, et si, M_n étant le maximum de $|f^{(n)}(x)|$ dans (a, b), la série

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}$$

est divergente, la fonction $f(x)$ est entièrement déterminée dans (a, b) par sa valeur et celles de ses dérivées en un point de cet intervalle.

Ce résultat fait date ([2]) : Cauchy avait nettement aperçu qu'une fonction de variable réelle n'est pas déterminée par la donnée en un point de sa valeur et de celles de ses dérivées; par sa théorie du prolongement analytique, Weierstrass avait indiqué un cas étendu où $f(x)$ est définie par les conditions qui précèdent, celui où les valeurs successives des dérivées pour $x = x_0$ font converger la série de Taylor. Longtemps, on a pensé que cette condition suffisante était en même temps nécessaire. M. Denjoy, par la proposition précédente, a dissipé toute équivoque et confirmé avec éclat les idées que M. Borel avait développées, depuis sa première Note publiée aux *Comptes rendus* (12 février 1894).

Peu de temps après, M. T. Carleman complétait l'œuvre commencée par M. A. Denjoy en apportant les beaux résultats que son Livre ([3]) a rendus d'ores et déjà classiques. Nous y renverrons le lecteur, en soulignant seulement les liens qui unissent les recherches sur les fonctions quasi-analytiques à l'étude de la sommation des séries divergentes.

([1]) *C. R. Ac. Sc.*, t. 73, 9 décembre 1921, p. 1329.
([2]) *Voir* la Note de M. Borel, *ibid.*, p. 1431.
([3]) *Leçons sur les fonctions quasi-analytiques.*

99. L'un des plus importants problèmes abordés ici a eu pour objet la sommation des séries de Taylor à rayon de convergence nul. Cette question appartient, comme nous l'avons dit, à la classe des problèmes d'interpolation linéaire (au sens large de cette expression). A ce titre, la solution n'est déterminée que lorsqu'on impose aux données certaines restrictions; M. Denjoy obtient justement une restriction de cette nature en écrivant que

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}$$

diverge. Modifiant légèrement les notations, nous poserons avec M. Carleman la définition suivante [1] : soit $\{\alpha_n\}$ une suite de nombres positifs indéfiniment croissants; nous dirons que $f(x)$, indéfiniment dérivable dans l'intervalle $(0, 1)$, appartient à la classe $\mathcal{C}_\alpha$ associée à cette suite s'il existe un nombre k tel qu'on ait, quel que soit n,

$$|f^{(n)}(x)| < (k\alpha_n)^n.$$

On démontre que si f, f_1, f_2 sont des fonctions de $\mathcal{C}_\alpha$, il en est encore ainsi de f_1+f_2, de $f_1 f_2$ et de la primitive de f; il va de même pour la dérivée si $\alpha_{n+1} : \alpha_n$ demeure borné.

Cela posé, si la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ est divergente, chaque fonction $f(x)$ de $\mathcal{C}_\alpha$, d'après le théorème de M. Denjoy, sera déterminée par la connaissance des valeurs de $f(x)$ et de ses dérivées en $x=0$. D'où ce problème : *calculer effectivement la fonction $f(x)$ de $\mathcal{C}_\alpha$, connaissant cette suite de valeurs* (compatible avec la définition de la classe)

$$f^{(n)}(0) = C_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Nous allons indiquer comment M. Carleman résout ce problème. Soit $\{\beta_n\}$ une suite de nombres positifs croissants, telle que la série $\sum \frac{1}{\beta_n}$ diverge plus lentement que $\sum \frac{1}{\alpha_n}$. Par exemple, en

---

[1] Voir *C. R. Ac. Sc.*, t. 76, 8 janvier 1923, p. 64, et aussi le Chapitre VII de l'Ouvrage cité.

posant $\frac{1}{\alpha_n} = u_n$, $\frac{1}{\beta_n} = v_n$, on peut prendre [1]

$$v_n = \frac{u_n}{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}.$$

Cela posé, considérons parmi les fonctions $f(x)$ assujetties aux conditions

$$f(0) = C_0, \quad f'(0) = C_1, \quad f''(0) = C_2, \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(0) = C_{n-1},$$

celle qui fournit le minimum de l'intégrale [2]

$$I_n(f) = \int_0^1 \left\{ f^2(x) + \frac{f'^2(x)}{\beta_1^2} + \frac{f''^2(x)}{\beta_2^4} + \ldots + \frac{[f^{(n)}(x)]^2}{\beta_n^{2n}} \right\} dx,$$

soit I_n ce minimum. Il est clair que nous aurons

$$I_1 \leqq I_2 \leqq I_3 \leqq \ldots$$

cette suite converge vers une limite finie, car en vertu de la définition de $\mathcal{C}_\alpha$, nous avons nécessairement

$$I_n < \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{k\,\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)^{2\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{k}{u_1 + u_2 + \ldots + u_\nu}\right)^{\nu} = S,$$

d'où *a fortiori*, pour $\nu \leqq n$, en désignant par $f_n(x)$ la fonction réalisant le minimum I_n

$$\frac{1}{\beta_\nu^{2\nu}} \int_0^1 [f_n^{(\nu)}(x)]^2\, dx < S.$$

---

(1) Cette série est bien divergente, car son terme général peut encore s'écrire

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n},$$

et il est toujours possible de trouver une suite croissante d'entiers $k_1, k_2, \ldots, k_n$ telle que l'on ait $S_{k_n} > 2 S_{k_{n-1}}$, on en déduit la possibilité de séparer la série en paquets de termes (commençant respectivement par des termes de rangs k_1, k_2, …, k_n) tels que la somme des termes de chacun de ces groupes surpasse $\frac{1}{2}$. On a d'ailleurs $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$: la divergence de Σv_n est donc plus lente que celle de Σu_n.

(2) Nous admettrons ici l'existence de ce minimum : *voir* la démonstration dans le Livre de M. Carleman (p. 66 et 67), elle est basée sur la résolution d'une équation intégrale linéaire.

On a en outre, pour $n \geqq \nu + 1$, la relation

$$f_n^{(\nu)}(x) = C_\nu + \int_0^x f_n^{(\nu+1)}(y)\,dy,$$

d'où en appelant x_1, x_2 deux nombres quelconques de l'intervalle $(0, 1)$ et utilisant l'inégalité de Schwarz

$$[f_n^{(\nu)}(x_1) - f_n^{(\nu)}(x_2)]^2 = \left[\int_{x_1}^{x_2} f_n^{(\nu+1)}(y)\,dy\right]^2 < S\,\beta_{\nu+1}^{2\nu+2}(x_2 - x_1)^2.$$

Il résulte de là que chacune des suites

$$\begin{array}{ccccc} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) & \dots \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \dots & f'_n(x) & \dots \\ f''_1(x) & f''_2(x) & \dots & f''_n(x) & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \end{array}$$

est formée de fonctions *bornées dans leur ensemble* et *également continues*. On peut donc, d'après un théorème connu, trouver une suite d'entiers croissants n_1, n_2, n_3, ... telle que la suite correspondante

$$(\sigma) \qquad f_{n_1}(x) \quad f_{n_2}(x) \quad f_{n_3}(x) \quad \dots$$

converge uniformément ainsi que toutes les suites dérivées vers une fonction $f(x)$. Cette fonction, indéfiniment dérivable, aura sa dérivée d'ordre p définie comme limite des dérivées d'ordre p des fonctions de la suite σ. Elle satisfera donc à la condition

$$f^{(p)}(0) = C_p$$

quel que soit l'entier p.

Nous avons d'ailleurs, toujours d'après l'inégalité de Schwarz,

$$|f^{(\nu)}(x) - f^{(\nu)}(0)| \leqq \sqrt{\int_0^1 [f^{(\nu+1)}(s)]^2\,ds} < \sqrt{S}\,(\beta_{\nu+1})^{\nu+1},$$

d'où l'on déduit aisément, en tenant compte des conditions imposées aux $f^{(\nu)}(0)$, que la fonction $f(x)$ ainsi trouvée appartient bien à la classe $\mathcal{C}_\alpha$. Donc, d'après le théorème de M. Denjoy, la suite auxiliaire des β_ν, que nous avons choisie en nous conformant seulement à des conditions qualitatives [1], s'élimine tout calcul

---

[1] Nous avons seulement indiqué *un exemple* de choix conforme à ces conditions.

fait et n'exerce aucune influence sur la fonction $f(x)$ obtenue qui est finalement la solution commune à une classe infinie de problèmes de minimum, provenant des choix de la suite $\{\beta_\nu\}$ conformes aux conditions indiquées.

Tel est le procédé de sommation régulier que M. Carleman a imaginé, dans le domaine réel, pour la sommation d'une série de Taylor toujours divergente : la somme $f(x)$ est déterminée en tant que solution d'un problème extrémal d'ordre infini, par le fait d'appartenir à une classe $\mathcal{C}_\alpha$ quasi-analytique [1]. En revenant aux conventions du n° 19 *bis*, nous avons ainsi un type d'hypothèse A'_1, propre à déterminer la solution de notre problème d'interpolation dans des conditions plus larges que les conditions classiques d'analyticité. Ces dernières correspondent d'ailleurs au choix d'une classe $\mathcal{C}_\alpha$ particulière, qu'on obtient en posant

$$\alpha_n = \sqrt[n]{n!}$$

Malgré l'importance de ces considérations, nous ne pouvons insister davantage ici. Nous renverrons une fois encore le lecteur au beau Livre de M. Carleman et signalons à son attention les Notes de M. Borel (*Comptes rendus*, t. 173, p. 1431, et t. 176, p. 66) [2].

---

[1] Il résulte d'une remarque faite plus haut que l'addition, la multiplication et l'intégration pourront s'effectuer, au sein de la classe $\mathcal{C}_\alpha$, au moyen des développements divergents et conformément aux processus usuels.

[2] *Voir* également les n^{os} 11, 12, 12 *bis* de l'Ouvrage déjà cité de MM. Hadamard et Mandelbrojt. Dans un autre ordre d'idées (principe des facteurs de convergence), citons également : MAURO PICONE, *Sui metodi di sommazione delle serie*, *Annali di Matemat.*, 4^e série, t. II, 1924-1925, p. 263-295. Cet important Mémoire, que nous avons connu trop tard pour l'analyser en détail, s'inspire du problème suivant : Sachant qu'un procédé de sommation régulier, appliqué à une série oscillante, la laisse telle, peut-on affirmer du moins que le second intervalle d'indétermination est intérieur au premier ? Il en est bien ainsi pour les procédés englobés par le théorème ici démontré de M. Perron, au moins dans le cas particulier du n° 86 *bis*. Dans le même esprit, l'auteur étudie la sommabilité de séries dont les termes sont des fonctions de certains paramètres, et résout les questions suivantes : continuité, dérivabilité et intégrabilité terme à terme de la somme ou des limites d'indétermination.

SUR L'EFFICACITÉ COMPARÉE DES MÉTHODES DE SOMMATION PAR MOYENNES AU POINT DE VUE DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

NOTE DE M. GEORGES BOULIGAND.

Nous nous proposons ici d'établir ce résultat que nous avons indiqué sans démonstration au n° 44.

La méthode de sommation par les fonctions entières permet, moyennant un choix convenable de la fonction sommatoire [1], *d'effectuer au moins partiellement le prolongement analytique d'une série de Taylor* (lorsque la chose est possible), *et par conséquent de sortir du cercle de convergence.*

Par contre, il serait vain d'attendre un tel résultat de la sommation par les séries divergentes, c'est-à-dire celle qui consiste à chercher la limite de

$$\sigma_n = \frac{c_0 S_0 + c_1 S_1 + \ldots + c_n S_n}{c_0 + c_1 + \ldots + c_n} \qquad (c_i > 0),$$

lorsque Σc_n *diverge, ou de la sommation qui consiste à prendre la limite de*

$$\sigma_n = \frac{c_0 S_n + c_1 S_{n-1} + \ldots + c_n S_0}{c_0 + c_1 + \ldots + c_n}$$

et dans laquelle rentrent les procédés de sommation de Cesàro.

C'est ce que nous allons montrer, en reprenant les notations des nos 43 et suivants, où nous avons distingué trois types de tableaux rectangulaires indéfinis (3), (4) et (5), donnant naissance aux procédés sommatoires que nous allons avoir à comparer ici.

Prenons d'abord le cas d'un tableau de la forme (3). Montrons qu'en général, pour $|u| > 1$, on ne peut avoir à la fois

$$(1) \quad \lim_{n=\infty} \frac{c_n + c_{n-1} u + \ldots + c_0 u^n}{c_n + c_{n-1} + \ldots + c_0} = 0, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{c_n}{c_0 + c_1 + \ldots + c_n} = 0,$$

en effet, la seconde de ces relations entraînerait la possibilité de faire cor-

[1] Pour les modalités introduites par tel ou tel choix, *voir* le fascicule VII du *Mémorial des Sciences Mathématiques*, Chap. III et IV, par M. BUHL.

respondre à tout ε positif une valeur de n à partir de laquelle on ait la suite indéfinie d'inégalités

$$\frac{c_n}{c_0 + c_1 + \ldots + c_n} < \varepsilon, \qquad \ldots; \qquad \frac{c_{n+k}}{c_0 + c_1 + \ldots + c_{n+k}} < \varepsilon, \qquad \ldots,$$

ce qui, en posant $c_0 + c_1 + \ldots + c_n = \gamma_n$ peut encore s'écrire

$$\gamma_n > \frac{1}{\varepsilon}(\gamma_n - \gamma_{n-1}), \qquad \ldots, \qquad \gamma_{n+k} > \frac{1}{\varepsilon}(\gamma_{n+k} - \gamma_{n+k-1}),$$

on en déduit que l'on a, quel que soit k,

$$c_{n+k} < \gamma_{n+k} < \frac{\gamma_{n-1}}{(1-\varepsilon)^{k+1}}.$$

Il en résulte que le rayon de convergence de la série entière

$$\varphi_n(x) = c_n + c_{n+1}x + \ldots + c_{n+k}x^k + \ldots$$

est au moins égal à $1 - \varepsilon$. Il en est donc de même de celui de la série

$$\varphi_0(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m + \ldots$$

et comme ε peut être pris arbitrairement petit, ce rayon ne peut être inférieur à l'unité. Supposons essentiellement que $\frac{1}{u}$ ne soit pas racine de l'équation

$$\varphi_0(x) = 0,$$

alors, la première de nos relations limites équivaut à

$$\lim_{m \to \infty} \frac{|u|^m}{c_0 + c_1 + \ldots + c_m} = 0.$$

Elle n'est pas conciliable avec la seconde, car si nous reprenons le nombre positif ε et la valeur particulière n que nous lui avons fait correspondre, nous aurions pour $m = n + k$

$$\frac{c_0 + c_1 + \ldots + c_{n+k}}{c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1}} < (k+1)\varepsilon.$$

Or, de la relation

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|u|^{n+k}}{c_0 + c_1 + \ldots + c_{n+k}} = 0$$

résulterait *a fortiori*, en vertu de l'inégalité précédente, la relation suivante

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|u|^k}{1 + (k+1)\varepsilon} = 0,$$

qui n'a visiblement pas lieu, la limite du premier membre étant infinie.

Donc, dans l'ensemble des valeurs de u qui ne sont pas racines de l'équation

$$c_0 + \frac{c_1}{u} + \frac{c_2}{u^2} + \ldots = 0,$$

l'incompatibilité annoncée est bien établie.

45. Un résultat analogue s'applique certainement à la sommation par les séries divergentes, bien qu'il paraisse difficile de l'établir avec le même degré de généralité. Le théorème à démontrer est que, si la série Σc_n est divergente, et si $|u|$ surpasse l'unité, on ne peut avoir en général

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_0 + c_1 u + \ldots + c_n u^n}{c_0 + c_1 + \ldots + c_n} = 0. \tag*{2)}$$

Remarquons d'abord que si l'on a fixé u, à supposer que la relation (10) soit satisfaite pour une suite $\{c_n\}$ déterminée, donnant naissance à une série divergente, elle le sera *a fortiori* si l'on substitue à cette suite une suite $\{\varepsilon_n c_n\}$, donnant naissance à une autre série divergente $\Sigma \varepsilon_n c_n$ et telle que la suite $\{\varepsilon_n\}$ soit non croissante. C'est là en effet une conséquence du théorème de M. G. Hardy établi au n° 42 (2°, b), et du fait que la relation (10) traduit la réussite du procédé de sommation, appliqué à la série Σu^n. Donc, inversement, à supposer que la propriété en litige n'ait pas lieu pour la valeur u et pour une suite $\{c_n\}$ donnant une série Σc_n divergente, elle n'aura pas lieu non plus pour les suites $\{k_n c_n\}$ où les k_n sont des facteurs positifs non décroissants. Il en est encore ainsi lorsque cette propriété de la suite $\{k_n\}$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang.

Une application très simple nous montre immédiatement la portée de cette remarque. Supposons tous les c_n égaux à l'unité. Nous aurons alors à considérer l'expression

$$\frac{1 + u + u^2 + \ldots + u^n}{n + 1},$$

on voit immédiatement qu'elle est infinie. Donc la relation (10) n'aura jamais lieu lorsque la suite des c_n sera croissante (tout au moins à partir d'un certain rang).

Cette remarque va nous suffire à établir *pratiquement* le résultat annoncé. Supposons que la suite $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$, soit décroissante, mais avec une régularité suffisante pour que les suites de la forme $\{P(n) c_n\}$ en désignant par $P(n)$ un polynome, soient monotones à partir d'un certain rang. Il en sera ainsi notamment de la suite $\{n(n-1)c_n\}$ des coefficients de la dérivée seconde de la fonction

$$c_0 + c_1 u + \ldots + c_n u^n.$$

Il est clair que ces coefficients $n(n-1)c_n$ doivent alors croître sans limite, sans quoi la série des c_n serait convergente, ce qui est contraire à

l'hypothèse. On en conclut que l'expression

$$\frac{1.2c_2 + 2.3c_3 u + \ldots + (n-1)n\, c_n u^{n-2}}{1.2c_2 + 2.3c_3 + \ldots + (n-1)n\, c_n}$$

ne peut tendre vers zéro dans aucun domaine extérieur au cercle $|u| < 1$. *A fortiori*, en est-il de même de l'expression

$$\frac{1.2c_2 + 2.3c_3 u + \ldots + (n-1)n\, c_n u^{n-2}}{c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n} = f''(u) \qquad \left(\text{avec } f = \frac{\Sigma c_i u^i}{\Sigma c_i}\right),$$

qui a le même numérateur que la précédente et un dénominateur moins grand. Mais si, *dans un domaine* Δ du plan (u), la relation (2) avait lieu, d'après un théorème de M. Montel sur les suites de fonctions holomorphes possédant une limite (¹), cette relation entraînerait

$$\lim_{n=\infty} f''(u) = 0,$$

dans un nouveau domaine Δ' obtenu en excluant du précédent un continu, dépourvu de points intérieurs (c'est-à dire une ligne cantorienne) et d'un seul tenant avec la frontière de Δ; or nous venons de voir que cela est impossible. Il est donc bien établi que la méthode de sommation par les fonctions entières possède sur les deux autres types de méthode envisagés dans cette Note, un privilège incontestable au point de vue du prolongement analytique.

(¹) Voyez GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, t. II, 4ᵉ édition, p. 676, 677, 678.

EXERCICES ET RÉSULTATS DIVERS.

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

I. *Séries divergentes.*

1. Soient $\Sigma\alpha_n$ et $\Sigma\beta_n$ deux séries divergentes à termes positifs. Montrer que l'existence d'une limite pour

$$\frac{\alpha_0 S_0 + \alpha_1 S_1 + \ldots + \alpha_n S_n}{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n},$$

entraîne celle d'une limite égale pour

$$\frac{\beta_0 S_0 + \beta_1 S_1 + \ldots + \beta_n S_n}{\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_n},$$

pourvu que l'on ait à la fois, en désignant par K une constante positive

$$\frac{\beta_n}{\alpha_n} < \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_n}{\beta_n} > K\,\frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{\alpha_n}.$$

(HARDY, *Quart. Journ. Math.*, t. 38, 1907, p. 269-288.)

2. Montrer que si $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots$, sont inférieurs, en valeur absolue, à l'unité, la série

$$\theta_1 + \frac{\theta_2}{2} + \ldots + \frac{\theta_n}{n} + \ldots$$

ne saurait être sommable (C, k) sans converger.
(HARDY, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2e série, vol. VIII, 1909, p. 301.)

3. Établir le même résultat, en supposant seulement que tous les θ_n, ou bien surpassent -1, ou bien sont inférieurs à $+1$.
(LANDAU, *Prac. matematyczno-fizycznych*, vol. XXI, 1910, p. 97.)

4. On dit qu'une série Σu_n est bornée (C, k) lorsque les expressions C_n^k (p. 97) sont bornées. Démontrer qu'alors, la série $\sum \frac{u_n}{(n+1)^r}$ converge pour $r > k$.
(CHAPMAN, *Proc. Lond. M. Soc.*, 2e série, vol. IX, 1911, p. 382-387.)

5. Montrer que la série $\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta + \ldots$ est sommable (C, k) pour chaque valeur positive de k; que sa somme est nulle, sauf pour les multiples de 2π ; que sa sommabilité est uniforme dans l'intervalle (ε, $2\pi - \varepsilon$).

6. Soit $f(x)$ définie dans l'intervalle fermé $-\pi$, $+\pi$ et de valeur absolue intégrable au sens de Lebesgue, dans cet intervalle. La série de Fourier attachée à une telle fonction est sommable (C, k) pour chaque $k > 0$ et sa somme est $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ pour chaque point de discontinuité de première espèce.

(Gronwall, *Bull. Amer. M. Soc.*, t. **20**, 1913, p. 139-146.)

7. Soit, sur la surface d'une sphère, une fonction F(P) uniforme et de valeur absolue intégrable au sens de Lebesgue. La série de fonctions de Laplace attachée à F(P) est sommable (C, 1) et a pour somme F(P) en chaque point où la fonction est continue.

(Gronwall, *Math. Annalen*, t. 74, 1913, p. 213-270.)

8. Si une série à termes bornés est sommable par le procédé exponentiel de Borel [c'est-à-dire $\lim e^{-a} S(a)$], elle est aussi sommable (C, 1). Dans ce cas, le rapport $S_n : \sqrt{n}$ tend vers zéro.

(Hardy et Littlewood, *Palerm. Rend.*, t. 41, 1916, p. 36-53.)

9. On considère la série

$$1 + \frac{\lambda}{1} x + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!} x^2 + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{3!} x^3 + \ldots.$$

Montrer que les facteurs de convergence de l'exemple V, page 223, fournissent sa somme sur le cercle unitaire (sauf au point 1) lorsqu'on prend

$$k > \mathcal{R}(\lambda) - 1.$$

(Perron, *loc. cit.*)

10. Trouver la région dans laquelle les facteurs de convergence

$$\Phi_\nu = \frac{x^{\nu+1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+\nu)}$$

permettent de sommer la série $1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$. En déduire la région de sommabilité qu'ils assignent à une série $\Sigma a_n z^n$ quelconque.

(Perron, *ibid.*)

11. Pour toute série où les S_n sont bornées, la méthode exponentielle

équivaut à la recherche d'une limite pour l'expression

$$\frac{S_0 + (e-1)S_1 + (e^{\sqrt{2}} - e)S_2 + \ldots + (e^{\sqrt{n}} - e^{\sqrt{n-1}})\,S_n}{e^{\sqrt{n}}};$$

elle est donc peu efficace pour ce genre de séries.

(Paul Lévy, *Bull. Soc. Math.*, t. 54, 1926, p. 1-25.)

12. On adjoint à la série Σa_n la série

$$\Sigma a_n \left(\frac{y}{1-y}\right)^{n+1}$$

qui, pour $y = 0,5$, se réduit formellement à la précédente. On la développe suivant les puissances de y, et l'on fait $y = 0,5$ dans ce développement. Trouver la forme du terme général de la nouvelle série obtenue par cette transformation (dite d'*Euler*). Montrer que le procédé de sommation correspondant est régulier. Montrer que le champ de convergence, sans cesse croissant, de ses itérés, tend à la limite vers celui de la définition exponentielle de Borel.

(K. Knopp, *Math. Zeits.*, 15, 1922, p. 226-253.)

II. *Intégrales divergentes.*

13. On dit que l'intégrale

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

est sommable (C, 1) lorsque l'expression

$$\frac{1}{x}\int_a^{x}\left[\int_a^{\alpha} f(\beta)\,d\beta\right]d\alpha$$

possède une limite S, pour x infini. Établir que le procédé de définition de cette limite généralisée est régulier. On considère l'intégrale

$$F(\alpha) = \int_a^{\infty} f(x)\,\varphi(\alpha, x)\,dx,$$

où la fonction $\varphi(x, \alpha)$ est telle que :

1° $\displaystyle\int_a^{X} x\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right| dx$ admette une borne supérieure indépendante de α et de X;

2° $x^2|\varphi|$ admette une borne supérieure indépendante de x;

3° $\lim\limits_{\alpha \to 0} \varphi(\alpha, x) = 1$.

Montrer que, dans ces conditions (satisfaites par exemple en prenant $\varphi = e^{-\alpha x}$), on a

$$\lim_{\alpha \to 0} F(\alpha) = S.$$

(Bromwich, *Math. Ann.*, t. 65, 1908, p. 350-369.)

14. Généralisant aux intégrales les processus de Hölder et de Cesàro, on pose

$$h_0(x) = \int_0^x f(u)\,du, \qquad x h_1(x) = \int_0^x h_0(u)\,du, \qquad \ldots,$$

$$x h_k(x) = \int_0^x h_{k-1}(u)\,du,$$

$$S_0(x) = \int_0^x f(u)\,du, \qquad S_1(x) = \int_0^x S_0(u)\,du, \qquad \ldots,$$

$$S_k(x) = \int_0^x S_{k-1}(u)\,du.$$

Montrer que l'existence d'une limite pour $h_k(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$, entraîne celle d'une limite égale pour $k!\,x^{-k} S_k(x)$ et réciproquement.

Landau, *Leipz. Ber.*, t. 65, 1913, p. 131-138.)

15. On pose

$$S(x) = \int_0^x f(u)\,du \qquad \text{et} \qquad \sigma(y) = \int_0^\infty S(x)\,K(x, y)\,dx.$$

où $K(x, y)$ désigne une fonction positive telle que

$$\int_0^\infty K(x, y)\,dx = 1.$$

On considère le procédé consistant à substituer à la limite de $S(x)$, pour x infini, celle de $\sigma(y)$, pour y infini. Moyennant quelles conditions ce procédé est-il régulier? Montrer que ce problème englobe celui du n° 42, si l'on choisit convenablement les fonctions f et K (en leur autorisant des discontinuités).

Étudier les généralisations des cas particuliers envisagés au n° 43.

Étudier le cas d'un noyau $K(x, y)$ de signe quelconque, dont la valeur absolue admet entre a et x et par rapport à y, une intégrale bornée (indépendamment de x) : montrer que la régularité a bien lieu si $K(x, y)$ tend vers zéro, pour x infini, et cela uniformément dans l'ensemble des valeurs de y.

Silvermann, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 17, 1916, p. 284-294.)

FIN.

TABLE DES MATIÈRES